

Origami and Geometric Constructions

By Robert J. Lang

Copyright ©1996–2010.

Russian translation by
Mark A. Sigalovsky
© 2008-2010

All rights reserved.

Оригами и геометрические конструкции¹ (теория построений)

Роберт Джеймс Ланг

Русский текст
Марк А. Сигаловский.

Введение • Introduction	3
Предварительные замечания и определения • Preliminaries and Definitions	4
Двоичное деление • Binary Divisions	6
Двоичный алгоритм складывания • Binary Folding Algorithm	6
Двоичные приближения • Binary Approximations	10
Рациональные дроби • Rational Fractions	13
Пересекающиеся диагонали • Crossing Diagonals	13
Построение Фуджимото • Fujimoto’s Construction	17
Метод Нома • Noma’s Method	20
Построение Хага • Haga’s Construction	22
Иррациональные отношения • Irrational Proportions	25
Цепные дроби • Continued Fractions	25
Квадратичные иррациональности • Quadratic Surds	30
Деление углов • Angle Divisions	35

¹ Это статья, которую я (Р.Д.Ланг, *здесь и далее*) изначально написал в 1996 году; В 2003 г. сокращённая версия появилась в книге *A Tribute to a Mathematician*.* Версия 2003 появилась на моём вебсайте, <http://www.langorigami.com>. В настоящей версии (2010) исправлены некоторые ошибки предыдущих версий: в частности, выправлен ряд опечаток и дано верное имя д-ра Абэ, автора одноимённого метода; моя особая признательность Жаку Жустену за 7 «аксиом». Моя благодарность всем тем, кто прислал мне правки к версии статьи 2003 года.

*(*примерный перевод названия* - «Посвящение *Маготематику*» или «...*МатеМагу*») Книга посвящена М. Гарднеру и продолжает его математические традиции).

Аксиоматическое оригами • Axiomatic Origami	42
Вводное слово • Preliminaries.....	45
Складывание • Folding	47
Совмещения • Alignments	48
Совмещение точки с точкой ($P \leftrightarrow P$) • Bringing a point to a point.....	48
Совмещение точки с прямой ($P \leftrightarrow L$) • Bringing a point onto a line.....	48
Совмещение прямой с другой прямой ($L \leftrightarrow L$) • Bringing one line to another line	49
Совмещение складыванием • Alignments by folding	50
Множественные совмещения • Multiple Alignments	51
Построимость • Constructability	52
Аксиома 6 и кубические кривые • Axiom 6 and Cubic Curves	52
Компьютерные приближения • Approximation by Computer	57
Ссылки • References.....	62
Комментарии • Translator's comments.....	64

Введение • Introduction

Построения циркулем и угольником хорошо знакомы большинству учащихся из курса геометрии средней школы. Сегодня они видятся самое большее как причудливая диковина, представляющая разве что академический интерес. Для древних греков и египтян, однако, среди прочих многочисленных применений, геометрические конструкции были полезным, а для некоторых - и ежедневным, *насущным* инструментом построений и исследований.

Классические правила построений циркулем и угольником разрешают одним циркулем проводить дуги и откладывать расстояния, и одним немеченым угольником чертить прямые линии; оба инструмента не могут использоваться вместе (к примеру, нельзя использовать циркуль для эффективной разметки угольника). Однако у этой главной темы геометрических построений существует много вариаций, которые включают использование меченых линеек и других инструментов, кроме циркуля, для построения геометрических фигур.

Одна из наиболее интересных вариаций – использование для построений листа бумаги, построение складыванием. Как и традиционные конструкции циркулем и угольником, построения складыванием одновременно интересны академически и полезны практически – особенно в *оригами*, искусстве складывания цельных листов бумаги в завораживающие и прекрасные формы. Современный оригами-дизайн доказал возможность складывания форм невероятной сложности, реализма и красоты из одного цельного квадрата. Фигуры оригами обладают эстетической красотой, притягательной как для математика, так и дилетанта. Секрет их привлекательности частично кроется в простоте идеи: из простейших заготовок – «дебютов» вдруг возникает объект объёма, изящества и сложности, причём зачастую он строится алгоритмически - точно определённой последовательностью шагов. Однако многие работы оригами – даже относительно простые – требуют разметки - создания исходных сгибов в определённых местах квадрата: к примеру, деление его на трети или двенадцатые части. Тогда как всегда возможно вымерить и отметить нужное, существует эстетическая потребность создать ключевые точки разметки, известные как опорные точки, чистым складыванием.

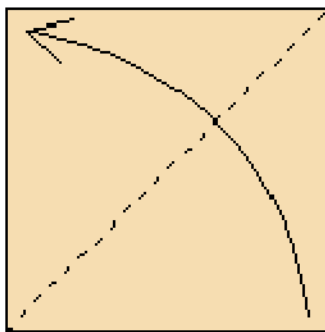
Таким образом, в оригами возникает практический интерес в создании последовательностей складывания для получения некоторых пропорций, что пересекается с математической областью геометрических построений. В этой статье я представлю разнообразие оригами - техник геометрических построений. Область эта богата и разнообразна, и удивительным образом связана с другими ветвями математики. Я (Роберт Джеймс Ланг) рассмотрю построения оригами, основанные на делении пополам («двоичном делении»), а затем покажу, как эти конструкции могут применяться для построения отрезков произвольной рациональной длины. Некоторые иррациональности также *построимы* с помощью оригами; я представлю ряд особо интересных случаев. Затем я обращусь к теме алгоритмов приближения – аппроксимирующих

последовательностей складывания, которые не столь математически интересны, сколь практически важны. Попутно я представлю аксиоматическую теорию оригами – построений, которая не только определяет, какие классы величин построимы складыванием, но также предоставляет основу для вычисления экстремально эффективных приближающих алгоритмов с помощью компьютера – техники, нашедшей приложение в ряде последних опубликованных книг оригами.

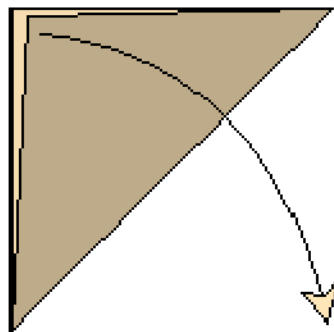
Термины и определения • Preliminaries and Definitions

Оригами, как вид геометрических построений, имеет много вариаций. В наиболее общем случае складывание начинается с незамеченного квадратного листа бумаги. Позволено только складывание; разрезы исключены. Цель оригами-построения – точно определить одну или более точек на листе, часто на его краях, но также возможно и на внутренности. Эти точки, известные как *опорные точки*, затем используются для определения оставшихся складок, которые формируют конечный объект. В процессе складывания модели попутно создаются новые опорные точки, которые образуются как пересечения сгибов друг с другом, или с краями листа. В идеальном *алгоритме складывания* – пошаговой серии инструкций оригами — каждый шаг точно определён комбинациями совмещений элементов исходной фигуры – листа бумаги, где элементы – это точки, стороны (края), линии сгибов, или пересечения последних.

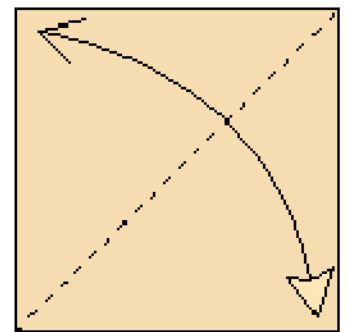
Два примера создания таких совмещений показаны на Рис.1 и 2. Рисунок 1 иллюстрирует складывание листа бумаги пополам вдоль его диагонали. Сгиб определён совмещением угла с противоположным ему углом, и уплощением листа. Когда бумага разглажена,



1. Сложите правый нижний угол к верхнему левому.



2. Разверните.



3. Перегните, как показано (сложите и разверните)

Рис. 1 Алгоритм складывания квадрата вдвое по диагонали.

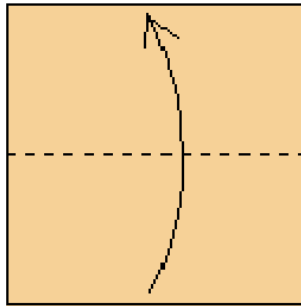
полученная складка соединит два других угла (если лист действительно квадратный).

В краткой записи два шага, «складывание» и «раскладывание», обозначаются одной общей стрелкой, как в шаге 3 Рис.1.

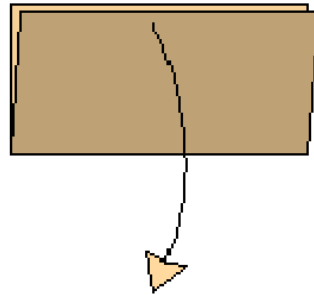
Рис. 2 изображает способ складывания листа пополам («книжкой»). Этот сгиб может определяться тремя различными, но равносильными путями:

- (1) Сложите нижний левый угол к верхнему левому.
- (2) Сложите нижний правый угол к верхнему правому.
- (3) Совместите нижний край листа с верхним краем.

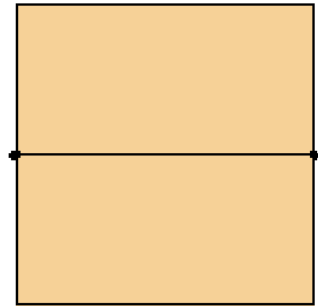
Для квадрата эти три способа равносильны. Однако если вы начнёте с листа, хоть немного



1. Сложите нижнюю сторону к верхней



2. Разверните



3. Сгиб определил две новые точки на сторонах.

Рис.2. Алгоритм складывания квадрата пополам «книжкой».

отличного от квадрата (к примеру, с параллелограмма), каждым из трёх способов вы получите отличные друг от друга результаты.

В обоих случаях, раскрыв бумагу до исходного квадрата, вы обнаружите, что создали новый сгиб. Выполняя алгоритм Рис. 2, вы также определили две новые точки – середины сторон. Каждая из средних точек в точности определена пересечением сгиба с краем листа.

Эти две последовательности также иллюстрируют правила, которые мы примем для геометрических оригами- построений. Цель этих построений – определить одну или более точек или линий внутри квадрата с заданными геометрическими свойствами (как то, бисекторы¹ или трисекторы углов), или имеющих количественное определение (как то, точка, отмечающая $1/3$ длины стороны). Мы примем следующие правила:

- (1) Все линии определены как стороны (края) квадрата, либо как сгибы на нём.
- (2) Все точки определены пересечением двух линий.
- (3) Все линии однозначно определены комбинациями совмещений точек и линий.
- (4) Складка формируется одним сгибом, уплощением результата, и (по выбору), раскладыванием.

Правило (4), в частности, особенно ограничительно; оно гласит, что сгибы должны выполняться только по правилу «*один сгиб за один раз*». В противоположность ему, все фигуры оригами, кроме простейших, включают шаги, в которых множественные складки

делаются одновременно. Далее в этой работе мы обсудим, что происходит, когда ограничение (4) ослабляется.

Двоичное деление • Binary Divisions

Одна из наиболее общих оригами-конструкций, возникающих в практическом складывании - задача деления одной или двух смежных сторон квадрата на N равных частей, где N – некоторое целое число. Рис. 2 иллюстрирует простейший случай—деление стороны квадрата на две части, и решение для него. Конечно, этот метод применим не только к квадрату; он работает также хорошо для любого отрезка. Так, каждая из половин квадрата может быть также разделена пополам, и т. д. Последовательно деля отрезки надвое, мы можем разбить сторону квадрата (прямоугольника) на четверти, восьмые части

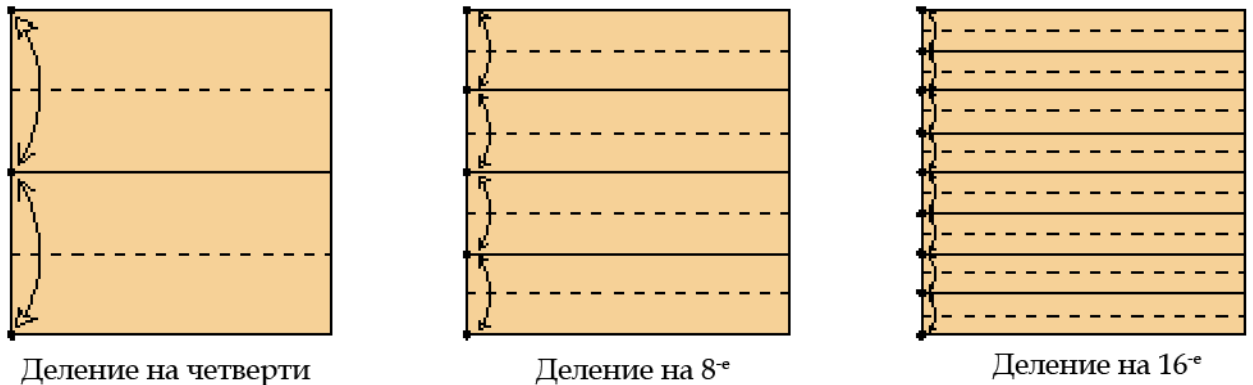


Рис. 3. Деление квадрата на 4^e , 8^e и 16^e части.

и т.д., как показано на Рис. 3.

Этот метод позволяет нам делить квадрат в отношениях $1/2$, $1/4$, $1/8$,...и вообще, $1/2^n$ для целого n . Каждая часть составляет $1/2^n$ стороны квадрата. Соизмеряя все величины с этой стороной, мы можем сказать, что построили дробь $1/2^n$, где дробь задана « на языке » стороны квадрата.

Также возможно построить дробь вида $m/2^n$ для любого целого $m < 2^n$. (Далее везде мы будем рассматривать только дроби из $[0;1]$). Самый простой способ – полностью разбить сторону квадрата на 2^n -ые доли, затем отсчитать m долей от начала. Этот метод в целом требует $2^n - 1$ сгибов, и не так уж эффективен, поскольку полное разбиение квадрата возникает в результате создания множества лишних складок. Существует элегантный метод построения любой дроби этого типа, который использует минимальное число сгибов. Рациональная дробь, знаменатель которой есть чистая степень числа 2, называется *двоичной дробью*; метод складывания таких пропорций назван *двоичный алгоритм складывания*.

Двоичный алгоритм складывания • Binary Folding Algorithm

Двоичный алгоритм складывания был описан Брунтоном [1] и обобщён Лангом [2]. Он даёт эффективную последовательность складывания для построения любого отношения, являющегося двоичной дробью, и основан на двоичной записи чисел. В двоичной записи

всего две цифры, 1 и 0; все числа записываются как строки из нулей и единиц. Любое число может быть записано в двоичной системе строкой такого вида. Например, числа от 1 до 10 могут быть представлены двоично, как показано в Таб. 1.

Десят.	Двоич.
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010

Таб. 1. Двоичные эквиваленты десятичных чисел от 1 до 10.

Любая двоичная дробь вида $m/2^n$ может быть ‘сложена’ - построена складыванием - в точности n сгибами, и требуемая последовательность действий закодирована в двоичном представлении дроби.

Двоичная запись дробей лучше понимается в аналогии с обычной десятичной записью. В десятичной записи каждый знак слева от десятичной запятойⁱⁱ понимается как кратное степени 10; к примеру,

$$1043 = 1 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0 = 1000 + 0 + 40 + 3. \quad (1)$$

То же происходит и в двоичной записи, за исключением того, что вы используете степени 2 вместо степеней 10, и имеется только две доступные цифры: 1 and 0. Таким образом, двоичное число 1011 есть

$$1011 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 0 + 2 + 1 = \text{одиннадцать}. \quad (2)$$

По этим соображениям, любое целое число может быть представлено в двоичной записи единственной комбинацией нулей и единиц.

Хотя мы только что проделали это для целого числа, т.е. в наименее общих предположениях, также возможно представить в двоичной записи и дроби. Это аналогично нашей стандартной десятичной записи, в которой дробные величины даются знаками справа от десятичной запятой (хотя сейчас её следует называть «двоичной запятой» вместо «десятичной»). К примеру, также, как десятичная дробь 0.753 означает

$$.753 = 7 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3} = \frac{753}{1000}, \quad (3)$$

двоичная дробь .111 может быть представлена как

$$.111 = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = \frac{7}{8}. \quad (4)$$

Другие примеры: дробь $1/2$ в двоичном виде выглядит как .1; дробь $1/4$ - как .01, тогда как $3/4$ есть .11. Дробь $5/8$ есть .101, а $23/32$, записанная двоично, есть .10111. Любая дробь, знаменатель которой есть чистая степень двух, имеет двоичное представление с конечным числом знаков справа от запятой.

Вы можете построить двоичную дробь для любого числа, в том числе дробиⁱⁱⁱ, следуя этому алгоритму:

- (1) Запишите запятую.
- (2) Умножьте дробь на 2.
- (3) Выделите целую часть (1 или 0) и запишите её справа от последнего, что вы уже записали.
- (4) Повторите шаги (2) и (3) столько раз, сколько необходимо, каждый раз добавляя знаки справа, пока вы не получите в остатке 0.

Тем же образом, дробь $m/2^n$ записывается запятой, плюс двоичное выражение целого m , которое снабжено достаточным количеством нулей сразу же справа от запятой, что в целом даст n знаков.

Как насчёт дробей, чей знаменатель не является чистой степенью 2, т.е. включает и другие числа, или вообще не содержит двойки? Если вы запишете число такое, как $1/3$, в двоичном виде, используя вышеописанный алгоритм, вы никогда не получите в остатке нуль. Вместо этого вы получите бесконечную строку знаков; к примеру, $1/3 = 0.010101\dots$ Если число рационально — т.е. является отношением двух целых при ненулевом знаменателе — то, начиная с некоторого места в его записи возникнет самоповторение (появится *период*).

Двоичное представление дроби даёт точный алгоритм - описание последовательности действий, чтобы отложить искомое расстояние на стороне листа. Вот он:

Чтобы отмерить складыванием расстояние, численно равное двоичной дроби, выпишите её двоичное представление.

Затем, начиная с *правого* конца дроби (последняя значащая цифра): для первого знака (который всегда = 1, т.к. вы отбрасываете весь хвост из нулей) сложите верхний край к нижнему и разложите.

Для каждого оставшегося знака, если он =1, перегните верхний край листа к предыдущей складке, защипните и разложите; если он =0, перегните нижний край листа к предыдущей складке, защипните и разложите.

Сравнивая этот алгоритм складывания с формулой двоичного представления числа, вы можете понять, как он работает. Возьмём, например, число 0.11001 ($25/32$). Удобный

способ выразить его двоично – записать его в виде суммы кратных степеней 2 (двоичных разрядов), как показано в равенстве (5).

$$0.11001 = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} \quad (5)$$

Другой способ записать двоичное выражение – представить его рядом вложенных произведений, как в равенстве (6).

$$0.11001 = \frac{1}{2} \times (1 + \frac{1}{2} \times (1 + \frac{1}{2} \times (0 + \frac{1}{2} \times (0 + \frac{1}{2} \times (1)))))) \quad (6)$$

Чтобы вычислить значение этого выражения, вы начинаете с *наивнутреннего* числа в выражении (последней «единицы») и в вычислении продвигаетесь влево, постепенно выбираясь из вложенных скобок. Если мы записываем дробь этим способом, она представляется серией «вложенных» действий, где каждое действие – одно из двух:

- (a) Прибавьте 0 и умножьте на $1/2$, или
- (b) Прибавьте 1 и умножьте на $1/2$.

Теперь посмотрим на оригами-алгоритм в «рецепте», данном выше. Если складка-метка расположена на нашем квадрате на расстоянии r от нижнего края, и мы перегнём нижний край вверх, к метке – сложим и разложим, то получим новую складку на расстоянии $(1/2)r$ от нижнего края. Если же мы перегнём к метке верхний край листа, новая складка появится на расстоянии $(1/2)(1+r)$ от нижнего края. Таким образом, численно перегибание краёв к метке – нижнего кверху, и верхнего книзу – равносильно выполнению действий (a) или (b), соответственно.

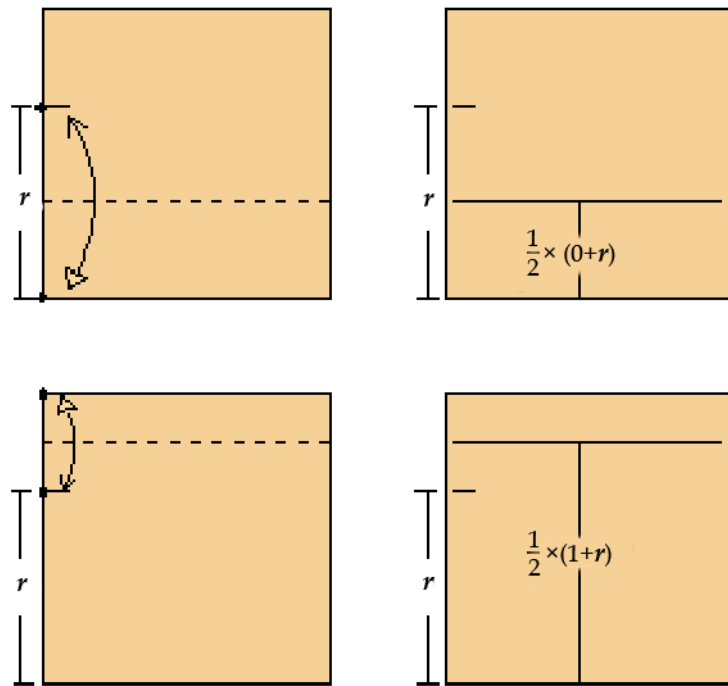


Рис. 4. (Вверху) Складывание нижней стороны вверх к метке r даёт новый сгиб на расстоянии $(r/2)$ снизу. (Внизу) Складывание верхней стороны вниз к r даёт новый сгиб на расстоянии $((1+r)/2)$ снизу.

Из того, что любая двоичная дробь может быть записана вложенной последовательностью двух операций (а) и (б), и два шага складывания на Рис.1 численно равносильны этим двум операциям, следует, что любая дробь может быть ‘сложена’ по её двоичному представлению.

Разница в эффективности между простым методом складывания всех долей и отсчёта нужного количества, и двоичным методом, весьма существенна в пользу последнего. Для построения дроби $m/2^n$ старый метод требует $2^n - 1$ сгибов; новый же - только n .

Двоичные приближения • Binary Approximations

Только те дроби, знаменатель которых есть чистая степень 2, обладают двоичным представлением с конечным числом знаков. Двоичные представления большинства дробей бесконечны. Но если мы оборвём двоичное представление в какой-либо точке, мы получим двоичную дробь, доставляющую хорошее (« близкое ») приближение к заданному числу. Это работает в любой системе счисления. К примеру, в десятичной записи $1/3=0.3333\dots$ (также бесконечная дес. дробь). Оборвав её на первом десятичном знаке (0.3), мы получим дробь $3/10$, которая лишь грубо равна $1/3$. Взяв два знака (0.33), получим $33/100$, что очень близко к $1/3$; и если мы берём три знака (0.333), получаем $333/1000$, что очень близко тем более.

То же самое происходит в двоичной записи. Если мы оборвём двоичную запись $1/3$ на двух знаках после запятой, получим $0.01=1/4$ — довольно грубое приближение $1/3$. Но

0.0101 есть $5/16$, что более близко к $1/3$, а 0.010101 равно $21/64$, что отличается от $1/3$ менее, чем на 1%. Таким образом, любое число может быть приближено двоичной дробью с произвольной точностью, что приводит к простому способу найти приближение любого отношения складыванием: записать двоичное выражение дроби; оборвать выражение на желаемом уровне точности; наконец, использовать двоичный алгоритм для построения последовательности складывания.

Дроби, представленные отношениями двух целых чисел, чей знаменатель не является степенью 2, имеют периодические двоичные представления. Это свойство делает возможной существование итеративной последовательности складывания, которая успешно приближает желаемую пропорцию. Период числовой записи задаёт цикл алгоритма - последовательность действий, которая должна повторяться до достижения результата на данном уровне точности.

К примеру, двоичное представление $1/3$ есть $\overline{01}$, где верхняя черта означает период (т.е., $\overline{01} = .010101\dots$). Группа цифр периода, 01, определяет последовательность, «Перегибайте верхний край вниз к предыдущей складке; перегибайте нижний край вверх к предыдущей складке» ('Перегибайте' = 'согните и ~~разогните~~'; вспомним, что мы начинаем справа).

Повторение этой процедуры снова и снова даст серию пар сгибов-меток, которые довольно быстро сходятся к точкам $1/3$ and $2/3$ на стороне квадрата, как показано на Рис.5.

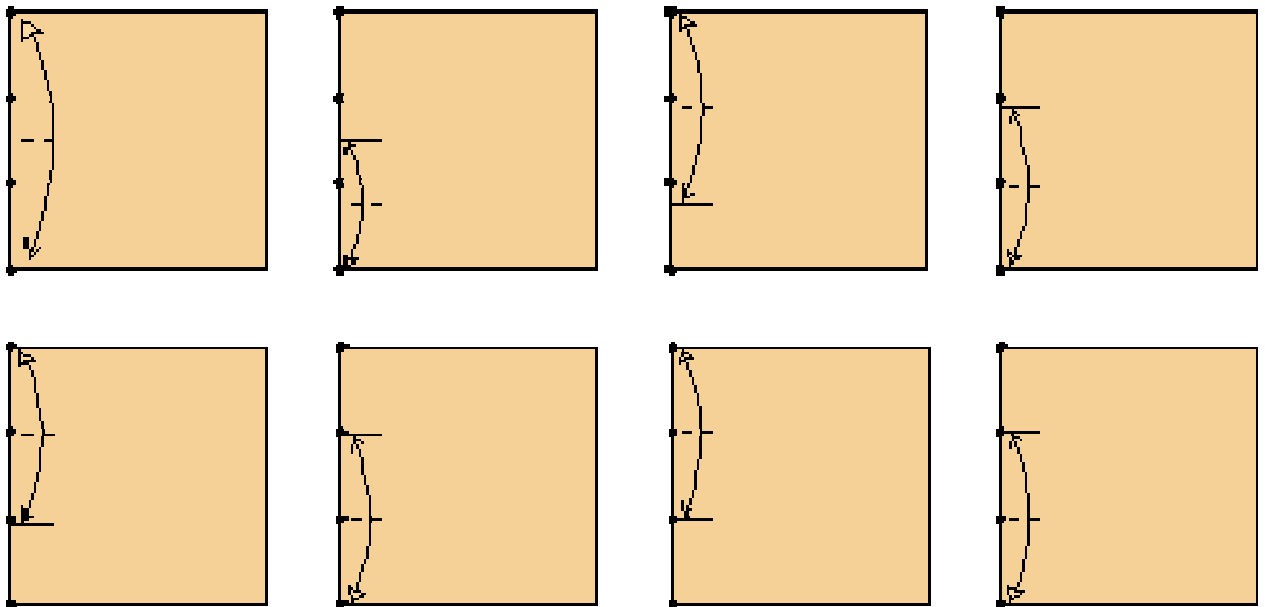


Рис. 5. Итеративный оригами-алгоритм для нахождения $1/3$.

Схожая итеративная техника существует для нахождения $1/5$, чье бинарное представление есть $\overline{0011}$. Эта последовательность также может быть извлечена из двоичного представления дроби: «сложите *верх* вниз дважды, затем *низ* вверх дважды; повторите, сколько потребуется». Т.к. все недвоичные рациональные дроби периодичны, такая итеративная конструкция подходит для всех них.

Можно предположить и обратное; пусть мы выбрали последовательность, такую как «сложите верх вниз дважды, затем низ вверх трижды; повторите». К какой дроби она будет *подходить*? Такой алгоритм имел бы двоичную запись $\overline{.11000}$. Существует хорошо известный метод превращения периодического выражения в рациональную дробь. Вы записываете период в числитель, а знаменатель заполняете тем же числом знаков d , где d на единицу меньше основания системы счисления. В нашем примере $d=1$, и таким образом,

$$\overline{.11000} = \frac{11000}{11111}_{\text{binary}} = \frac{24}{31}_{\text{decimal}}. \quad (7)$$

Итеративный метод для $1/3$, показанный на Рис. 5 подходит к меткам в точках $1/3$ and $2/3$ вдоль стороны квадрата. Поэтому алгоритм, определённый периодом 01 , отвечает двум периодическим дробям: $\overline{01}$ and $\overline{10}$, периоды которых есть циклические перестановки друг друга. По той же причине должно быть ясно, что каждая периодическая последовательность складывания будет подходить к множеству сгибов, определяемых всеми циклическими перестановками цифр периода. Так, например, 011 (вниз, вниз, вверх) будет подходить к меткам в точках

$$\frac{001}{111} = \frac{1}{7}, \quad \frac{010}{111} = \frac{2}{7}, \quad \text{и} \quad \frac{100}{111} = \frac{4}{7}. \quad (8)$$

Т.к. любое число, рациональное или нет, может быть приближено двоичным представлением, эта техника даёт способ складывания любой пропорции с произвольной степенью точности.

Преимущество двоичного алгоритма приближения в достижении им достаточно хорошей точности при относительно малом числе складок. Можно легко вычислить количество складок, требуемых для достижения заданного уровня точности. Если вы хотите сложить дробь r с точностью ε , число складок, требуемое для двоичного приближения, будет меньше или равно

$$\left\lceil \left(\log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right) - 1 \right\rceil, \quad (9)$$

где $\lceil \dots \rceil$ - потолочная функция (округление вверх до ближайшего целого).

Число сгибов, требуемое для складывания заданной пропорции – важная практическая мера оригами - алгоритма, называемая его *рангом* (*rank*). Алгоритм малого ранга требует меньше времени, и оставляет на листе меньше лишних складок. Для конечной двоичной дроби m/p (сокращённой до наименьшего значения), ясно, что ранг двоичного метода складывания, обозначенного $\text{bin}(m/p)$, равен

$$\text{rank}(\text{bin}(m/p)) = \log_2 p. \quad (10)$$

С чисто математической точки зрения наиболее интересны точные конструкции, но с практической позиции приближённые построения малого ранга более полезны. Выражение (9) показывает, что для получения точности порядка тысячных долей в приближении к желаемой пропорции (точность бóльшая, чем нужна обычно в реальном оригами) нам потребовалось бы не более 9 сгибов. На практике число складок может быть меньше, чем теоретический максимум. Некоторые пропорции могут попросту иметь точную двоичную запись с числом знаков, меньшим девяти.

Другое замечательное свойство двоичного алгоритма в том, что вы можете делать большинство складок в качестве небольших «защипов», отметок вдоль стороны листа; это не загромождает основную часть квадрата множеством излишних складок.

Существует и другое применение двоичного алгоритма; это ключевой элемент ряда точных алгоритмов определения расстояния. Тогда как двоичный алгоритм точен только для дробей, чей знаменатель – чистая степень двух, существует несколько других алгоритмов, которые позволяют точно сложить любое рациональное отношение. Эти алгоритмы описаны в последующих разделах.

Рациональные дроби • Rational Fractions

В технике складывания, известной как «*коробчатый метод*» или прямоугольное проектирование (*box-pleating*), описанной, среди других, в работах Хьюма и Элайаса, бумага изначально размечается сеткой сгибов, образующей квадраты равной величины. Модель может начинаться с деления бумаги на 12° , 16° , или менее часто, 9° , 15° доли, или даже такие «редкости» как 78° [3]. Частота возникновения потребности разделить квадрат на заданное число равных частей приводит к математической проблеме построения: как разделить квадрат на b равных частей? Более общо, мы можем задаться вопросом о том, как построить только складыванием отрезок длины, равной a/b стороны квадрата, где a и b – целые и b не есть степень 2. Двоичный алгоритм позволяет нам найти любую дробь вида m/p , где p – степень 2. Возможно ли начать с одной или более двоичных дробей, и построить соотношения, равные дробям недвоичным? Есть ряд различных способов сделать это.

Пересекающиеся диагонали • Crossing Diagonals

Одна из наиболее универсальных конструкций произвольной дроби a/b показана на Рис. 6. В ней используется два сгиба: один из них – диагональ квадрата; другой соединяет две точки на противоположных сторонах.

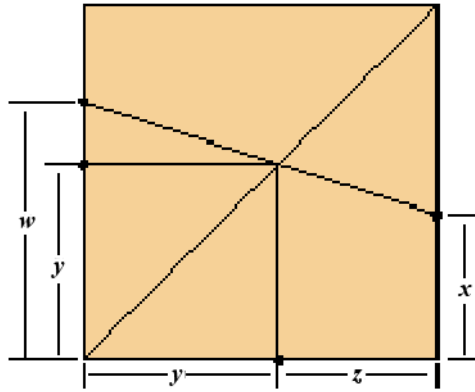


Рис. 6. Конструкция для нахождения рационального числа как отношения на стороне квадрата.

Мы начинаем с единичного квадрата, в котором мы наметили диагональ, идущую от нижнего левого к верхнему правому углу. Затем мы делаем две метки на расстояниях w и x соответственно вдоль каждой из двух сторон, и соединяем их складкой. Пересечение двух складок определяет новую точку, проекция которой на любую сторону квадрата задаёт новое расстояние y . Решение уравнений относительно y и его дополнения $z=1-y$, даёт

$$y = \frac{w}{1+w-x}, \quad z = \frac{1-x}{1+w-x}. \quad (11)$$

Идея кросс-диагонального построения (и многих других) в том, что выбираются два исходных отношения w и x , относительно лёгких для построения, т.е., двоичные дроби, для того, чтобы построить отношение y (или z), которое является дробью *не*двоичной (и которую мы обозначим как a/b). Таким образом, возьмём w и x как двоичные дроби

$$w \equiv \frac{m}{p}, \quad x \equiv \frac{n}{p}, \quad (12)$$

где m и n – целые, меньшие p , и p – степень 2. Тогда

$$y = \frac{m}{p+m-n}, \quad z = \frac{p-n}{p+m-n}. \quad (13)$$

Задавшись $y=a/b$, приходим к следующей цепочке шагов:

Определим p как следующую степень 2, большую либо равную, чем каждое из чисел a и $b-a$.

Положим $m=a$, $n=(p+a-b)$.

Построим точки $w=m/p$, $x=n/p$ вдоль левой и правой сторон квадрата, используя двоичный метод. Соединим их сгибом.

Построим диагональ.

Пересечение двух сгибов определит отношение a/b как высоту точки деления над нижней стороной квадрата (или, равносильно, её расстояние до левой стороны).

Рассмотрим несколько примеров. Наиболее распространенный тип нечётного деления квадрата - деление на трети. Если мы возьмём $a/b=1/3$, тогда $p=4$, $m=1$, $n=2$, что приводит к цепочке складывания, показанной на Рис.7.

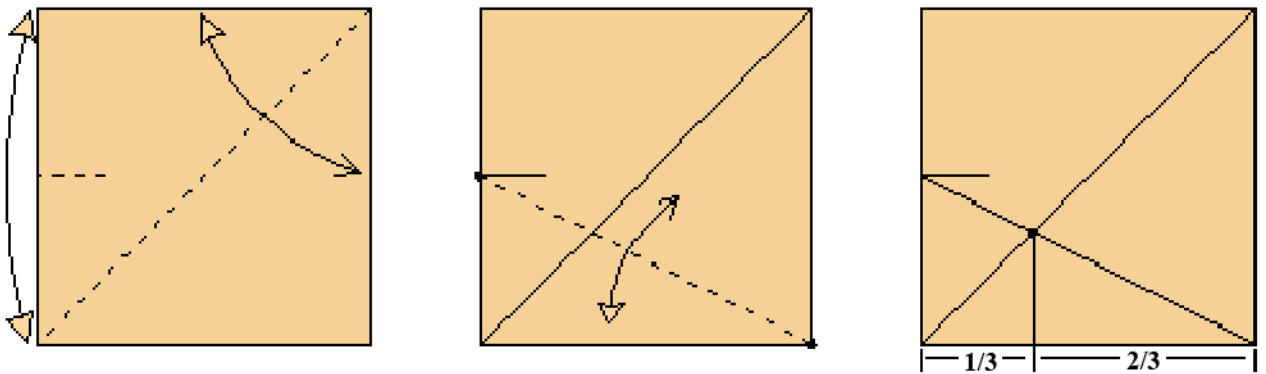


Рис. 7. Точная последовательность складывания для деления квадрата на 3^{-ти}.

Алгоритм деления на трети, показанный на Рис.7, довольно хорошо известен в оригами. Это лишь один частный пример общего оригами-метода, известного как *метод пересекающихся диагоналей* [2], или кросс-диагональный метод, который может быть применен к любому недвоичному рациональному числу. Таблица 2 представляет значения w и x , так же как и ранг, для сокращённых недвоичных дробей со знаменателями вплоть до 10. (Заметим, что для дроби $y=a/b$ расстояние z на Рис. 6 даёт отношение $(b-a)/b$, поэтому мы нуждаемся только в рассмотрении дробей, меньших $1/2$).

$y=a/b$	$z=1-y$	w	x	$rank$
1/3	2/3	1/2	0	3
1/5	4/5	1/4	0	4
1/6	5/6	1/8	3/8	8
1/7	6/7	1/8	1/4	7
2/7	5/7	1/4	3/8	7
3/7	4/7	3/4	0	4
1/9	8/9	1/8	0	5
2/9	7/9	1/4	1/8	7
4/9	5/9	1/2	3/8	6
1/10	9/10	1/16	7/16	10
3/10	7/10	3/8	1/8	8

Таб.2. Сокращённые не dvoичные дроби и двоичные дроби, приводящие к их построению.

Есть много возможных вариаций основной идеи нахождения рациональных отношений. Все они основаны на идее пересечения двух диагональных сгибов, имеющих различные углы наклона. (Та же мысль может использоваться для нахождения многих иррациональных чисел, особенно билинейных комбинаций целых и $\sqrt{2}$, как мы позже увидим). Вот другой вариант «кросс-диагоналей». Вместо того, чтобы всегда брать за один из сгибов диагональ квадрата, а другим соединять точки на противоположных сторонах, можно пересекать две 'диагонали', каждая из которой начинается в одном из нижних углов, как показано на Рис. 8. (При этом в слове 'диагонали' можно отбросить кавычки, если смотреть на эти линии, как на диагонали прямоугольников, боковые стороны которых - отрезки w и x , отсекаемые прямыми на сторонах квадрата).

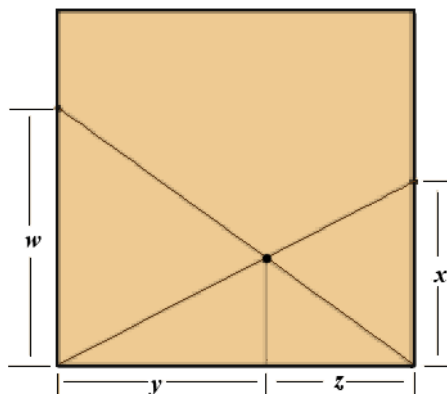


Рис. 8. Альтернативная кросс-диагональная конструкция для нахождения пропорций.

Для этого построения мы находим, что нижняя сторона поделена на части

$$y = \frac{w}{w+x}, z = \frac{x}{w+x}. \quad (14)$$

Снова, полагая w и x двоичными дробями,

$$w \equiv \frac{m}{p}, x \equiv \frac{n}{p}, \quad (15)$$

мы находим, что

$$y = \frac{m}{m+n}, z = \frac{n}{m+n}. \quad (16)$$

Это даёт следующую цепь действий для нахождения a/b :

Зададим p как наименьшую степень 2, большую каждого из чисел a и $b-a$.

Примем $m=a, n=b-a$.

Построим точки $w=m/p, x=n/p$ на левой и правой сторонах, используя двоичный способ.

Сгибами соединим точки w и x с нижними противоположащими углами.

Пересечение двух сгибов определит отношение a/b как высоту точки деления над нижней стороной квадрата (или, равносильно, её расстояние до левой стороны).

Таб. 3 выводит построенные дроби и ранги для тех же дробей, что и в Таб. 2. Оказывается, что для данной дроби два кросс-диагональных метода имеют одинаковый ранг.

$y=a/b$	$z=1-y$	w	x	$rank$
1/3	2/3	1/2	1	3
1/5	4/5	1/4	1	4
1/6	5/6	1/8	5/8	8
1/7	6/7	1/8	3/4	7
2/7	5/7	1/4	5/8	7
3/7	4/7	3/4	1	4
1/9	8/9	1/8	1	5
2/9	7/9	1/4	7/8	7
4/9	5/9	1/2	5/8	6
1/10	9/10	1/16	9/16	10
3/10	7/10	3/8	7/8	8

Таб. 3. Дроби построения и ранг для второй кросс-диагональной цепочки складывания.

Конструкция Фуджимото • Fujimoto's Construction

Альтернативная техника построения рациональных дробей была изобретена японским математиком Шузо Фуджимото [4], и была независимо переоткрыта геометром из Бостона

Жанин Моузли [5]. Алгоритм Фуджимото опирается на элегантную конструкцию для взятия обратных величин к сложным пропорциям, основанную на построении, показанном на Рис. 9.

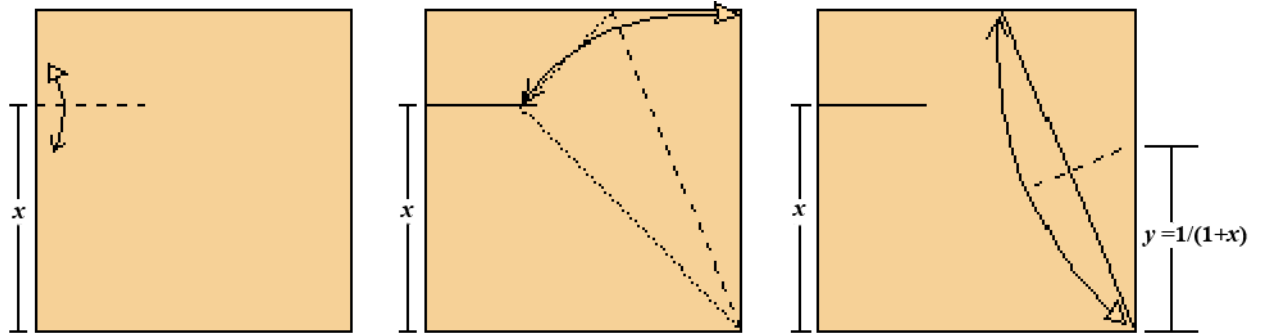


Рис. 9. Схема построения Фуджимото для нахождения обратной величины.

Начиная с отношения x , определённого сгибом на одной из сторон квадрата, эта двухшаговая последовательность определяет величину, обратную к $(1+x)$. Так, например, если вы хотите найти число, обратное к y , то, начиная алгоритм Фуджимото с величины $(y-1)$, отложенной вдоль левой стороны, вы получите число $1/(1+y-1)=1/y$.

Чтобы построить дробь a/b , мы полагаем x двоичной дробью

$$x \equiv \frac{m}{p}. \quad (17)$$

Используя построение Фуджимото, получаем расстояние y как

$$y = \frac{p}{m+p}. \quad (18)$$

Мы выбираем p как наибольшую степень 2, меньшую знаменателя b , и $m=b-p$. Тогда

$$y = \frac{p}{b}, \quad (19)$$

что даёт желаемый знаменатель b . Т.к. p - степень 2, мы можем использовать двоичный алгоритм, чтобы сократить эту дробь, умножив её на (a/p) , и записав конечное соотношение:

$$z = \frac{a}{p} y = \frac{a}{p} \times \frac{p}{b} = \frac{a}{b}. \quad (20)$$

Полный алгоритм резюмирован ниже.

Определим p как наибольшую степень 2, меньшую b .

Пусть $x=(b-p)/p$.

Построим x с помощью двоичного алгоритма, расширяя последнюю горизонтальную складку, показанную на Рис. 9.

Применим построение Фуджимото. Это даст отношение (p/b) на правой стороне листа, определённое меткой на ней.

Сократим это расстояние с помощью дроби a/p , снова используя двоичный алгоритм.

Я резюмирую дроби построения и ранг для несократимых недвоичных дробей в Таб.4.

y	$1-y$	x	a/p	$rank$
1/3	2/3	1/2	1/2	4
1/5	4/5	1/4	1/4	6
1/6	5/6	1/2	1/4	5
1/7	6/7	3/4	1/4	6
2/7	5/7	3/4	1/2	5
3/7	4/7	3/4	3/4	6
1/9	8/9	1/8	1/8	8
2/9	7/9	1/8	1/4	7
4/9	5/9	1/8	1/2	6
1/10	9/10	1/4	1/8	7
3/10	7/10	1/4	1/4	6

Таб.4. Дроби построения и ранг для алгоритма Фуджимото.

Хотя и кросс-диагонали, и алгоритм Фуджимото дают точные техники складывания для любой рациональной дроби, оригами-алгоритм на практике может быть и неточным, к примеру, если вам требуется сложить длинный, узкий треугольный клапан (что сложно сделать аккуратно). Различные методы построений иногда взаимодополняют; если один алгоритм долог, другой может быть короток, и если один приближителен, другой - точен. Для сравнения на Рис. 10. и 11. показано деление на равные пятые части двум способами.

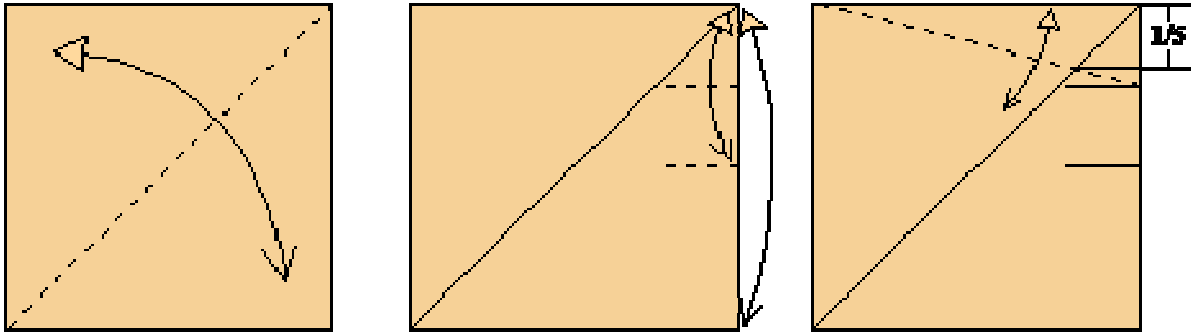


Рис. 10. Деление на 5^e кросс-диагоналями.

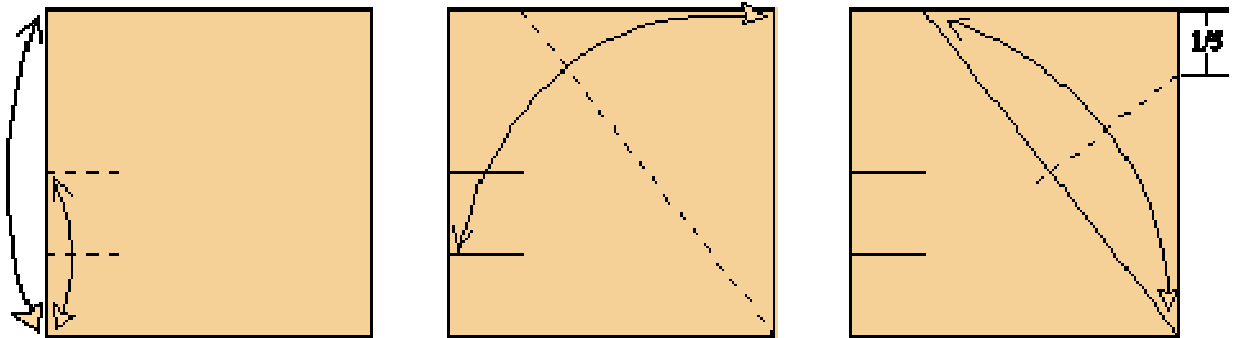


Рис. 11. Деление на 5^e методом Фуджимото.

Единственный минус алгоритмов кросс-диагоналей и Фуджимото в том, что они оставляют лишние сгибы, пролегающие через середину листа. Однако было бы неплохо, если бы существовали конструкции для любой дроби, которые можно было выполнить только лишь с помощью меток на сторонах квадрата, не загромождая складками внутренность листа? Такие построения существуют, и они – предмет следующих двух глав.

Метод Нома • Noma's Method

Если вы начинаете с требования, что единственно допустимые складки – только метки по сторонам квадрата, вы быстро найдёте, что есть только несколько возможных типов сгибов, позволяющих создавать такие метки. Два самых простых из них - следующие:

- (1) Вы можете совместить две метки на одной и той же стороне. Это именно то, что мы делаем, используя двоичный алгоритм; и мы знаем уже, что этот подход работает только для дробей со знаменателем вида 2^k .
- (2) Вы можете совместить метку на стороне с другой меткой на другой стороне.

Существуют и другие способы (с которыми мы встретимся позже), но даже в этих двух простых действиях есть существенный нереализованный потенциал. Рассмотрим случай, когда мы совмещаем две метки на соседних сторонах, и делаем новые метки там, где результирующий сгиб пересекает стороны, как показано на Рис. 12. Пригодность этого

действия для оригами-построений была открыта Масамичи Нома [6], поэтому назовём его построением Нома.

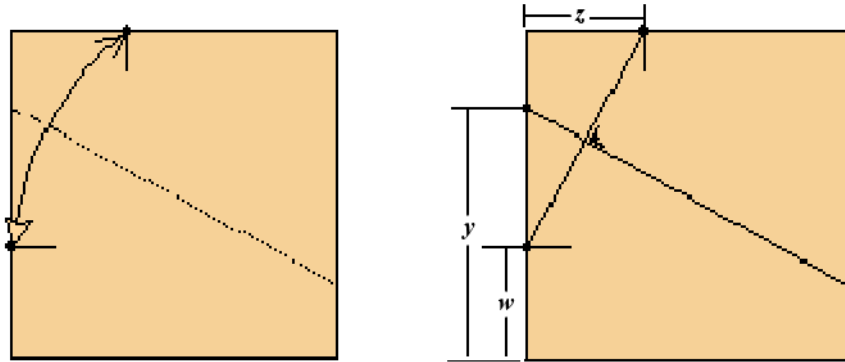


Рис. 12. Схема построения Нома.

Выведа ряд соотношений, (часть которых показана на Рис. 12), можно показать, что

$$y = \frac{1 - w^2 + x^2}{1 - w}, \quad (21)$$

и если принять

$$w = x = 1 - \frac{b}{2p}, \quad (21a)$$

тогда точка y задаёт расстояние

$$y = \frac{p}{b} \quad (22)$$

от нижней стороны квадрата. Вышесказанное приводит к алгоритму:

Определим p как наибольшую степень 2, меньшую b .

Построим отношения $w=b/2p$, $x=b/2p$ на левой и верхней сторонах, соответственно.

Совместим точку w с точкой x , делая сгиб, пересекающий левую сторону на высоте $y=p/b$.

Строим отношение a/p относительно полученного отрезка (считая от нижнего угла?).

Результат – искомая дробь a/b .

Полный алгоритм дан краткой цепочкой складывания на Рис. 13².

² Расстояние, обозначенное “ $b/2p$ ” было неправильно отмечено в оригинальной версии.

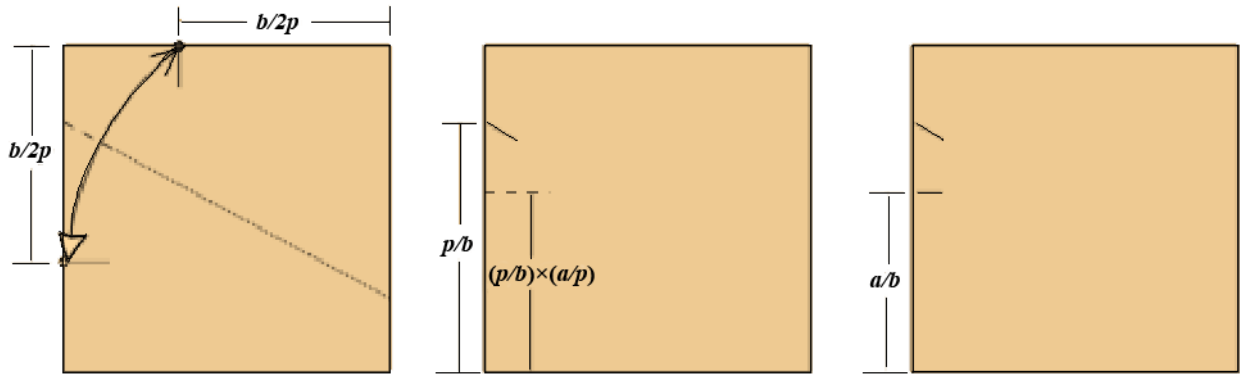


Рис. 13. Полный алгоритм Нома для любой рациональной дроби.

Требуемые дроби и ранги для рациональных чисел со знаменателями вплоть до 10 даны в Таб. 5.

y	$1-y$	$b/2p$	a/p	$rank$
1/3	2/3	3/4	1/2	6
1/5	4/5	5/8	1/4	9
1/6	5/6	3/4	1/4	7
1/7	6/7	7/8	1/4	9
2/7	5/7	7/8	1/2	8
3/7	4/7	7/8	3/4	9
1/9	8/9	9/16	1/8	12
2/9	7/9	9/16	1/4	11
4/9	5/9	9/16	1/2	10
1/10	9/10	5/8	1/8	10
3/10	7/10	5/8	3/8	10

Таб. 5. Отношения, построенные дроби и ранг для алгоритма Нома.

Здесь кое-что меняется; нам требуется применить двоичный алгоритм трижды (сначала к двум разным сторонам, затем снова – чтобы выполнить деление Нома), поэтому ранг метода Нома, вообще говоря, выше рангов других методов.

Построение Хага • Haga's Construction

Ещё одна конструкция была открыта Казуо Хага [7–9], она требует только одной диагональной складки и также может производить все рациональные дроби. Это построение известно как «теорема Хага». Вариация теоремы Хага, открытая Фушими, реализует деление на 5^e части, которое следовало бы сравнить с двумя предыдущими примерами такого деления. Деление Фушими показано на Рис.14.

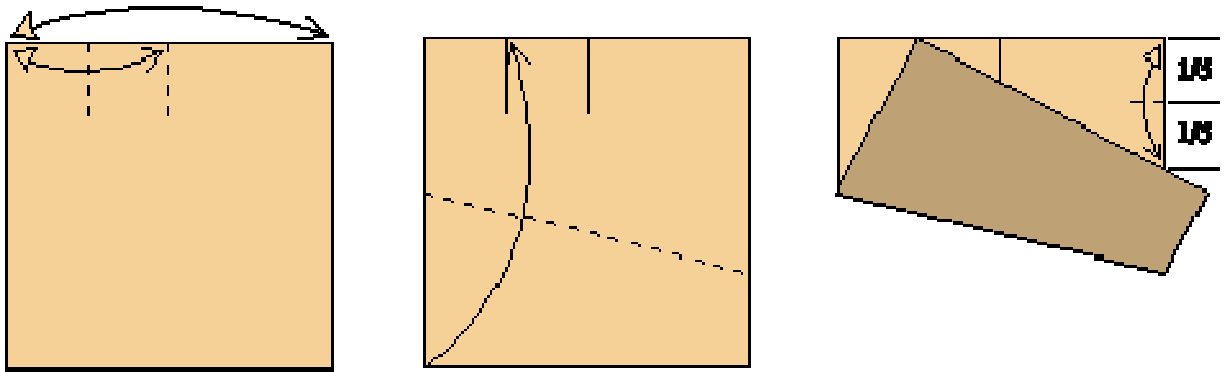


Рис. 14. Деление на $5^{\text{е}}$ части, основанное на теореме Хага.

Как и у первых двух алгоритмов, у построения Хага существует много вариаций, позволяющих найти и другие рациональные отношения. Общий вид построения Хага показан на Рис. 15. Есть два варианта; желаемая опорная точка может быть пересечением двух краёв листа, и тогда метка формируется складыванием вдоль одного из двух краёв, как на среднем чертеже Рис. 15. В другом случае к точке пересечения краёв сгибается угол (здесь - верхний).

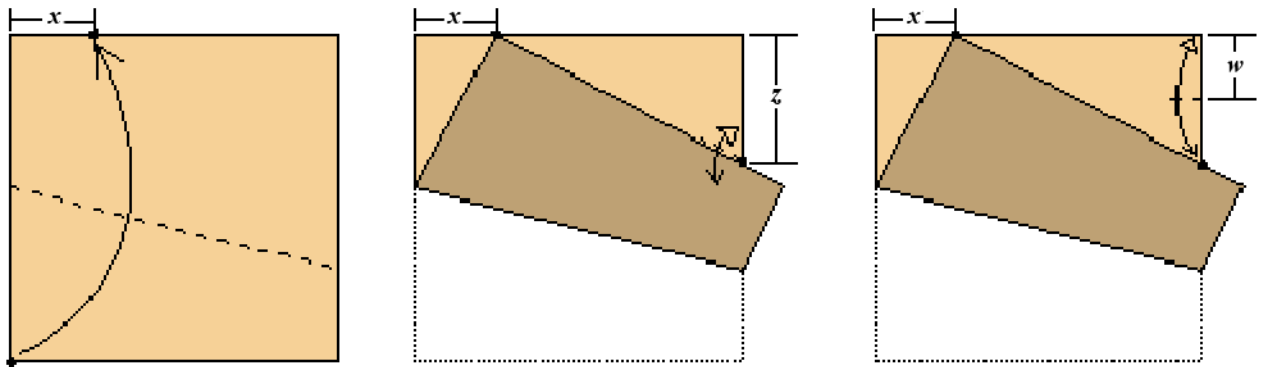


Рис. 15. Схема общего построения Хага.

Построение Хага отличается от других построений тем, что оно «непрерывно» - бумага не разворачивается между шагами складывания. Однако оно позволяет выполнить ряд особо эффективных рациональных построений. Если мы делаем первый сгиб на расстоянии x вдоль верхнего края, то два построенных расстояния на Рис. 15 выразятся как

$$z = \frac{2x}{1+x}, \quad w = \frac{x}{1+x}. \quad (23)$$

Это приводит к следующему построению дроби a/b :

€

Пусть p - наибольшая степень 2, меньшая b .

Положим $m=p-b$.

Построим точку $x=m/p$ на верхней стороне, используя двоичный метод.

Сложим нижний левый угол к построенной точке x .

Перегнём верхний правый угол к точке пересечения двух краёв, определяя расстояние $y=p/b$.

Сократим отрезок y на величину a/p , используя двоичный метод. Результат – желаемая дробь a/b .

Все величины показаны на Рис.16.

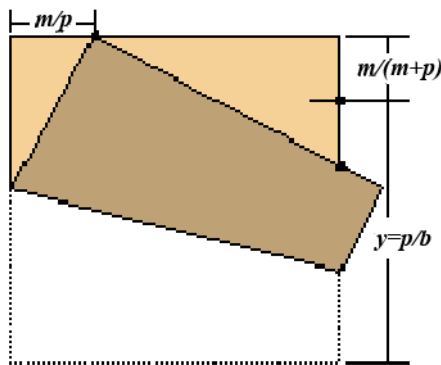


Рис. 16. Величины, возникающие при построении отрезка длины a/b методом Хага.

При построении Хага диагональная складка не требует заострения где – либо вдоль её длины (т.е. деформация листа вдоль сгиба – гибкая и обратимая, не оставляющая складки). Сгиб заостряется в первом варианте лишь на малом отрезке вдоль перегнутого края около правой стороны квадрата, для получения метки на ней – метка отсекает на стороне отрезок длины $2w$; во втором – только при сгибании к пересечению верхнего правого угла, что даёт отрезок w . Таб. 6 перечисляет дроби для построений Хага и их ранги:

$y=a/b$	$1-y$	m/p	a/p	rank
1/3	2/3	1/2	1/2	4
1/5	4/5	1/4	1/4	6
1/6	5/6	1/2	1/4	5
1/7	6/7	3/4	1/4	6
2/7	5/7	3/4	1/2	5
3/7	4/7	3/4	3/4	6
1/9	8/9	1/8	1/8	8
2/9	7/9	1/8	1/4	7
4/9	5/9	1/8	1/2	6
1/10	9/10	1/4	1/8	7
3/10	7/10	1/4	3/8	7

Таб. 6. Несократимые дроби, соответствующие дроби построения и ранги для метода Хага.

Решения, полученные методом Хага, вообще говоря, проще, чем соответствующие построения Нома, и если диагональный сгиб не уплощён, также могут выполняться без излишней разметки внутренности квадрата.

Иррациональные отношения • Irrational Proportions

Цепные дроби • Continued Fractions

Хотя в оригами возможно множество разнообразных геометрических построений, и множество пропорций может быть сложено в точности, существуют и такие отношения, точное построение которых невозможно даже и в оригами (такие, как $1/\pi$) - нельзя задать соответствующий оригами-алгоритм; или, даже если подобное построение возможно, оно покрывает бумагу таким большим числом сгибов, которое совершенно непрактично для реального складывания. Для практикующего оригамиста вопрос не в том, «как я могу сложить это отношение точно?», но в том «как можно сложить это отношение с требуемой точностью за наименьшее возможное число сгибов?»

В идеале, можно найти математически точный метод отложить расстояние, но такая точность нужна не всегда. В реальном складывании погрешности расстояний менее 0.5% длины стороны квадрата редко различимы. Значит, нет нужды в точном методе складывания заданной пропорции: достаточно найти способ близко «подойти» к ней, т.е. построить метод аппроксимации, иначе говоря, приближения.

Простой пример; предположим, мы хотели бы построить угол 60° внутри одного из углов квадрата, создав прямоугольный ($30^\circ-60^\circ-90^\circ$)-- треугольник на одной из сторон. Один из способов сделать это может быть таким: мы находим точку, в которой сгиб – сторона нашего угла пересекает сторону квадрата, как показано на Рис.17. Т.к. стороны взятого

треугольника соотносятся как $1:\sqrt{3}:2$ в частях стороны квадрата, расстояние от угла до сгиба вдоль нижнего края равно $1/\sqrt{3}=0.577\dots$ (длина меньшего катета). Тогда построение угла сводится к построению этого катета, т.е. к построению отрезка $1/\sqrt{3}$. Это расстояние не является ни двоичной, ни рациональной дробью, поэтому мы так и не имеем для него точного способа оригами-построения. Но можем ли мы найти для этого числа рациональное приближение, которое будет в точности «лучше» допустимой погрешности?

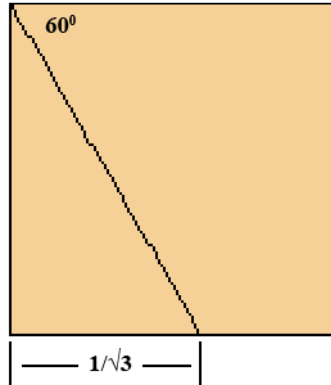


Рис. 17. Один из способов построить угол 60° - отложить расстояние $1/\sqrt{3}$ вдоль одной из сторон квадрата.

(Заметьте: в отличие от этого построения, существует ряд изящных и точных конструкций для нахождения угла 60° , но мы временно «забыли» о них, разобрав этот пример в целях иллюстрации).

Самый прямой способ сложить пропорцию – сделать это «в лоб»: записать число десятичной дробью, к примеру, $1/\sqrt{3}=0.57735\dots$. Оборвём запись на трёх знаках после запятой и запишем результат как обыкновенную дробь;

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57735\dots \approx 0.577 = \frac{577}{1000}. \quad (24)$$

Остаётся разделить бумагу на тысячные доли и отсчитать пятьсот семьдесят семь из них.

Хотя это слишком «лобовой» и грубый метод, двоичный алгоритм, описанный в первой главе, работает приблизительно так же. Если мы запишем дробь двоично, то получим

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.1001001111\dots \approx \frac{591}{1024}, \quad (25)$$

и теперь мы могли бы применить двоичный алгоритм (десять последовательных меток) для нахождения желаемой пропорции. Но и десять меток – долгое складывание. Хорошо было бы, если бы мы могли найти дробь малую, но при этом всё же близко подходящую к заданному числу? Часто такая дробь есть, но как её найти?

Ответ кроется в математическом объекте, называемом «цепная дробь», который возникает в теории чисел и математическом анализе [10]. Цепная дробь – это способ представить

число как дробь внутри дроби внутри дроби...и так далее. Общий вид цепной дроби таков:

$$r = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}}, \quad (26)$$

где r – искомое или представляемое число, а b_0, b_1 и b_2 обычно целые. Некоторые цепные дроби имеют конечное число членов - звеньев; в других вложенные друг в друга дроби уходят в бесконечность. Любое число может быть записано цепной дробью; фактически, существует бесконечно много цепных дробей, которые могут представлять одно и то же число. Однако если мы требуем, чтобы числа $\{b_n\}$ были целыми положительными, то представление заданного числа цепной дробью будет единственным — это значит, что существует только одна последовательность знаков b_n – чисел или букв, которая при подстановке в дробь даст требуемое число. К примеру, дробь $3/16$ задаётся цепной дробью

$$\frac{3}{16} = 0 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3}} \quad (27)$$

которая достаточно проста. С другой стороны, дробь $1/\sqrt{3}$ соответствует бесконечной цепной дроби

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577\dots = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}} \quad (28)$$

где многоточие показывает, что лестница дробей продолжает строиться — в бесконечность. Если r – рациональное число — значит, оно может быть представлено отношением двух целых, как $3/16$ — здесь число звеньев дроби конечно. Если число иррационально (как $1/\sqrt{3}$), последовательность звеньев никогда не остановится. Если число равно сумме рационального числа и квадратного корня из рационального, у дроби с некоторого места возникнет самоповторение - период (заметьте повторяющийся рисунок из 1 и 2 в последней дроби), но для большинства иррациональных чисел последовательность шагает своим проторенным путём, *ad infinitum*^{iv}.

Приложение цепных дробей на практике - следующее: даже если цепная дробь бесконечна, то, оборвав где - либо цепочку её звеньев, вы получите конечную дробь, которая будет близкой рациональной аппроксимацией (приближением) исходного числа. Чем больше звеньев вы оставите, тем лучше приближение.

Имея карманный калькулятор, легко определить первые несколько звеньев цепной дроби для любого числа. Возьмём, например, известную математическую постоянную $\pi=3.1415926535\dots$. Вот как можно построить для неё цепную дробь:

- (1) Вычтите целую часть и запишите её (*т.е.*, вычтите 3, оставляя 0.14159...).
- (2) Возьмите обратное к остатку число (*т.е.*, $1/0.14159\dots=7.06251\dots$).
- (3) Повторяйте шаги (1) и (2) с остатком, пока он не станет равным 0, или вы не устанете (или достигнете предела возможностей своего калькулятора).

Записанная вами последовательность целых определяет цепную дробь. Для числа π вы найдёте последовательность $\pi = \{3; 7, 15, 1, 293, 10, 3, \dots\}$, что означает

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{293 + \frac{1}{10 + \dots}}}}} . \quad (28)$$

Если вы оборвёте дробь снизу, вы получите рациональную дробь, являющуюся приближением числа π . Точность приближения зависит от того, где именно вы оборвёте бесконечную дробь. Первые четыре дроби для π , к примеру, таковы

$$3 = 3.00, \quad (29)$$

$$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3.1428\dots, \quad (30)$$

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = \frac{333}{106} = 3.141509\dots, \quad (31)$$

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3.14159292\dots \quad (32)$$

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{293}}}} = \frac{104,348}{33,215} = 3.14159265\dots \quad (33)$$

Как вы можете видеть из этого примера, чем дальше вы продолжаете дробь до того, как оборвать её, тем точнее рациональное приближение. Дроби, получаемые таким способом, известны как «подходящие дроби», или *конвергенты* цепной дроби. (В занимательной математике впоследствии дробь $355/113$, знаменитое приближение числа π , станет известно как 4-й конвергент).

Хотя вы и можете вычислить конвергенты, последовательно упрощая сложные многоступенчатые дробные выражения, есть способ проще – небольшая таблица, которую можно построить для быстрого вычисления подходящих дробей. Запишите целую последовательность цепной дроби в верхней строке таблицы, как показано в Таб. 7.

		3	7	15	1	293	...
0	1						
1	0						

Таб. 7. Вычисление конвергентов цепной дроби, представляющей число π .

Первые две пары чисел в колонке слева (и в двух строках таблицы), соответственно, 0, 1 и 1, 0. Далее вы успешно заполняете каждое место (ячейку) в этих строках по следующему правилу:

Число в каждой ячейке есть сумма двух других – числа на две ячейки левее, и произведения верхнего числа столбца с левым соседним числом относительно числа искомой ячейки.

Используя это правило, вы заполняете ячейки слева направо. К примеру, 1-я ячейка (сразу под 3 из верхней строки) заполняется числом $3 \times 1 + 1 = 3$. Ячейка ниже даёт $3 \times 0 + 1 = 1$. Во втором столбце (под 7): $7 \times 3 + 1 = 22$, и ячейка ниже - $7 \times 1 + 0 = 7$. И т.д. Для числа π таблица имеет вид:

		3	7	15	1	293	...
0	1	3	22	333	355	104,348	...
1	0	1	7	106	113	33,215	...

Таб. 8. Конвергенты для π .

Как вы можете видеть, сравнивая эту таблицу с рассмотренными ранее дробями, каждый конвергент есть просто отношение между числом в средней строке и соответствующим числом из нижней.

Так зачем преодолевать все эти сложности?; почему бы для получения рационального приближения просто не записать число конечной десятичной дробью? Причина использования цепных дробей как рациональных приближений исходит от уникального свойства подходящих дробей; каждый конвергент имеет наименьший общий знаменатель для заданного уровня точности. Т.е. каждый конвергент есть наилучшее возможное приближение числа, предшествующее следующему конвергенту, где «лучшее» означает наименьшую возможную ошибку. Так, $22/7$ – наилучшее приближение π со знаменателем, меньшим 106; $333/106$ – лучшее приближение со знаменателем, меньшим 113; и $355/113$ – лучшее приближение π со знаменателем, меньшим 33,215, что неправдоподобно хорошо (и это одна из причин, по которой этот частный вид дробей так знаменит). Конвергенты

цепных дробей с малыми знаменателями, разумеется, также могут быть очень точны. Даже такая простая дробь, как $22/7$ отличается от π только на 0.001.

Даже для построений оригами, не имеющих точных алгоритмов складывания, возможно сколь угодно приблизиться к точной пропорции, используя цепные дроби. Каково бы ни было число, вам требуется просто записать его цепной дробью, вычислить первые 4 или 5 конвергентов, и выбрать наименьший из них, который даёт приемлемо малую ошибку. Задача, таким образом, сведена к предыдущим, т.е. упрощена; вместо того, чтобы искать алгоритм складывания для любого числа вообще, нам требуется лишь найти такой алгоритм для получения любой рациональной дроби — отношения двух целых чисел. А способы это сделать нам известны - это алгоритмы складывания, описанные выше.

Квадратичные иррациональности • Quadratic Surds

Алгоритмы, которые я описал ранее, работают для нахождения рациональных чисел, отношений двух целых. Иногда в них есть прямая необходимость, к примеру, когда вы должны разделить квадрат на девятые части; иногда мы используем рациональную дробь как приближение другого отношения. Эти «другие» отношения могут содержать квадратные и кубические корни, тригонометрические функции, или даже могут быть величинами, вычисленными с помощью калькулятора или компьютера. Все такие пропорции могут быть приближены превращением их в рациональные числа, и последующим применением точного алгоритма складывания для нахождения рационального отношения.

Однако существует другое семейство часто возникающих в оригами иррациональных отношений, для которого простые и точные оригами-решения зачастую существуют: это отношения вида

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} \quad (34)$$

где a и b – целые числа, обычно малые [2]. Такие отношения называются квадратичными иррациональностями. (Если быть точным, эти пропорции составляют подмножество квадратичных иррациональностей; общие к.и. могут иметь числители, отличные от 1 и другие числа под квадратным корнем). Эти отношения возникают в оригами так часто, что они заслуживают отдельного упоминания. Во множестве оригами-развёрток применяются симметрии, связанные с геометрическими фигурами, углы которых кратны 22.5° , что составляет $1/16^{-10}$ единичного круга. В таких базах большинство главных линий развёртки пропорционально друг другу с коэффициентами вида $a + b\sqrt{2}$. Например, квадрат с множеством таких складок - бисекторов содержит семейство отрезков, которые составляют восходящий ряд пропорций такого типа.

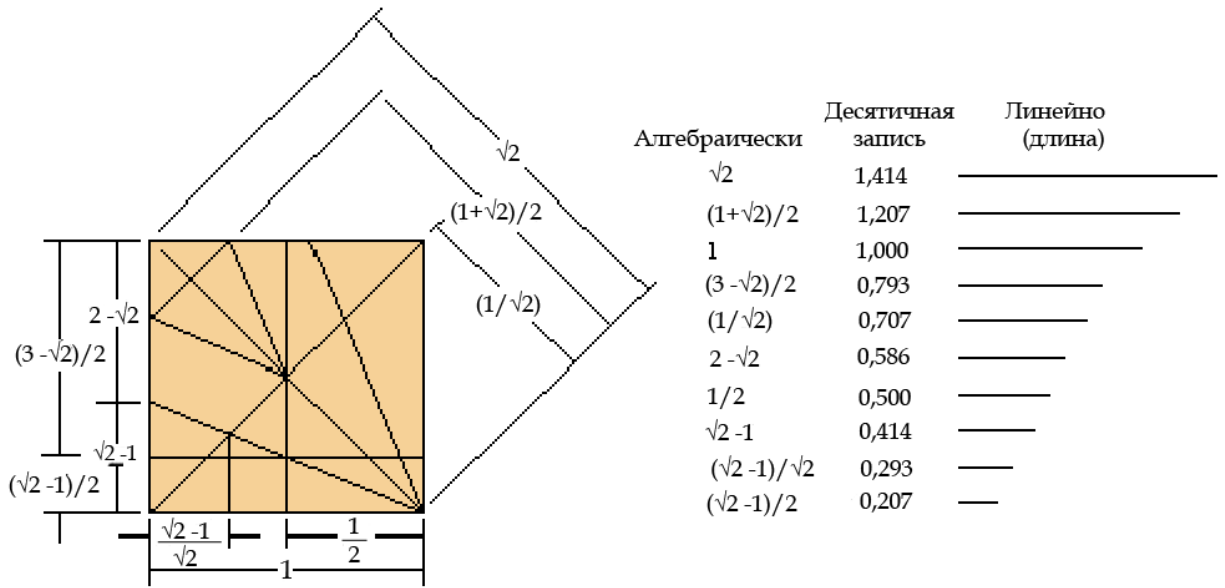


Рис.18. Билинейные иррациональности, возникающие в размеченном складками квадрате.

Развёртки баз оригами, использующих геометрические схемы 22.5° - симметрии, составлены из треугольников двух типов: $(45-45-90)$ - и $(22.5-67.5-90)$ - прямоугольных треугольников, стороны которых имеют пропорции, показанные на Рис. 19.

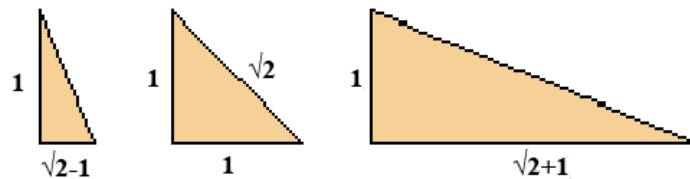


Рис. 19. Пропорции треугольников, углы которых кратны 22.5° .

Согласно методологии оригами – дизайна, известной как «замоещение» или *кладка (tiling)*, и описанной в [11–15], развёртки, или паттерны сложных баз собираются из более простых паттернов, которые состоят из таких треугольников. Обычно эти подпаттерны повторяются в развёртке многократно, отличаясь только размерностью отрезков. Если все складки пролегают под углами, кратными 22.5° , то все пропорции квадратов, прямоугольников и треугольников, составляющих подпаттерны, есть билинейные комбинации 1 и $\sqrt{2}$. Более того, коэффициенты взаимной пропорциональности простых паттернов тоже являются такими билинейными комбинациями. В результате размерности в такой развёртке типично соотносятся друг с другом с коэффициентами вида $a + b\sqrt{2}$.

К примеру, Рис. 20 изображает одну такую развёртку, использованную в фигуре орла, которую я создал несколько лет назад:

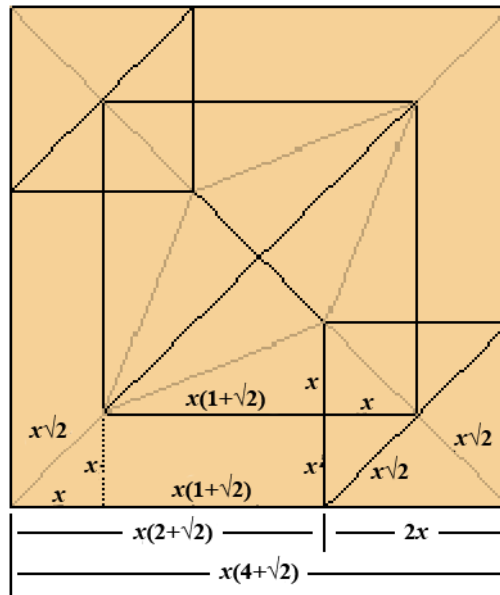


Рис. 20. Развёртка Орла и относительные пропорции.

На этом рисунке я поместил некоторые из пропорций относительно отрезка x . Все эти отрезки пропорциональны x . Пропорции смежных треугольников могут быть найдены в отношении к пропорциям трёх треугольников на Рис. 2.

Мы можем выписывать размерности всех отрезков, пока мы не доберёмся до стороны квадрата; суммируя длины всех отрезков, составляющих сторону, мы находим, что длина a стороны квадрата равна $x(4+\sqrt{2})$ единиц длины: $x(4+\sqrt{2}) = a$. Если предполагать квадрат единичным, то

$$x = \frac{1}{4 + \sqrt{2}}. \quad (35)$$

Чтобы построить развёртку оригами складыванием, необходимо найти расстояние x —или любое связанное расстояние, т.е., $x\sqrt{2}$, $2x$, или $x(1+\sqrt{2})$ — также складыванием. Это может быть сделано рядом способов: двоичной аппроксимацией или рациональным приближением с помощью цепных дробей, которое выполняется любым из рациональных методов (кросс - диагонали, Фуджимото, Хага или Нома).

Однако оказывается, что много отношений вида $a + b\sqrt{2}$, и в особенности последнее, может быть получено **точно** при использовании построения, подобного кросс - диагональному. Рассмотрим снова геометрию двух пересекающихся диагоналей, изображённую на Рис. 21.

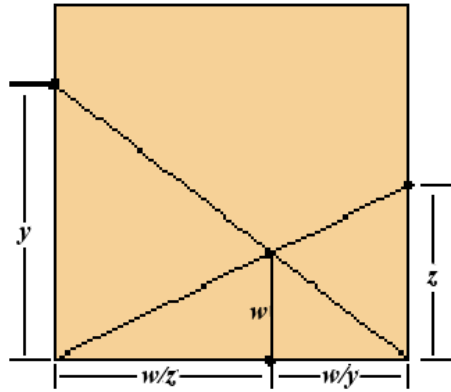


Рис. 21. Общий вид кросс-диагонального алгоритма.

Если две диагонали пересекают стороны на высоте y и z , соответственно, и мы определим w как высоту пересечения над нижним краем листа, то проведённый из пересечения перпендикуляр делит этот край (сторону) на отрезки длины $\frac{w}{z}$ и $\frac{w}{y}$, соответственно.

Таким образом, полная длина нижней стороны равна

$$w \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right). \quad (36)$$

Теперь сравним это выражение с длиной стороны, вычисленной нами для развёртки Рис. 20, которая равнялась $x(4 + \sqrt{2})$. Если мы приравняем их, мы можем попытаться вычислить w , x , y и z , что позволяет сделать относительно простое уравнение:

$$x(4 + \sqrt{2}) \equiv w \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right). \quad (37)$$

Самое простое - принять $x=w$. Тогда у нас остаётся уравнение

$$(4 + \sqrt{2}) = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right). \quad (38)$$

Если бы мы могли разбить $(4 + \sqrt{2})$ на две части, обратные значения к которым легко найти, мы имели бы точное решение для нахождения этой величины.

Как оказывается, есть много способов выполнить это деление. Позвольте мне сначала дать частное решение и показать, почему оно работает; затем я вернусь назад, чтобы объяснить другие способы и дать общий метод.

Частное решение есть:

$$(4 + \sqrt{2}) = ((2) + (2 + \sqrt{2})) = \left(\frac{1}{(1/2)} + \frac{1}{(1 - 1/\sqrt{2})} \right), \quad (39)$$

так что, если мы возьмём $y = 1/2, z = 1 - 1/\sqrt{2}$, пересекающиеся диагонали разделяют нижнюю сторону квадрата, как показано на Рис. 21.

Отрезок $y = 1/2$ мы найдём достаточно легко, но нахождение $z = 1 - 1/\sqrt{2}$ не так уж очевидно. Оказывается, однако, что это отношение возникает в фигуре оригами, известной как основа рыбы, что показано на Рис. 22.

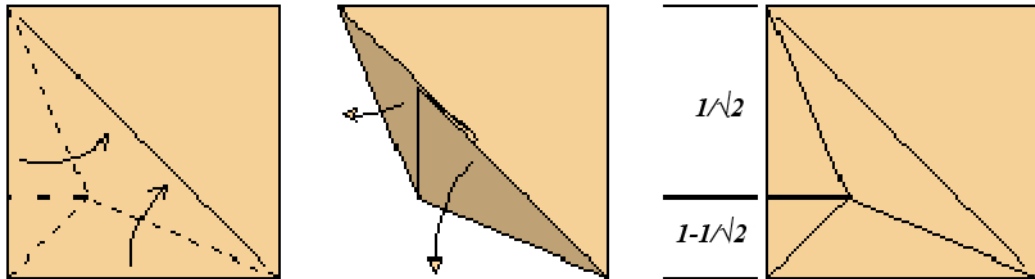


Рис. 22. Построение $1 - 1/\sqrt{2}$.

Таким образом, если мы начинаем с полуосновы рыбы на одной половине квадрата, и делаем метку посередине «противоположащей» боковой стороны, то две крест – диагонали делят нижнюю сторону в желаемом отношении, как показано на Рис. 23.

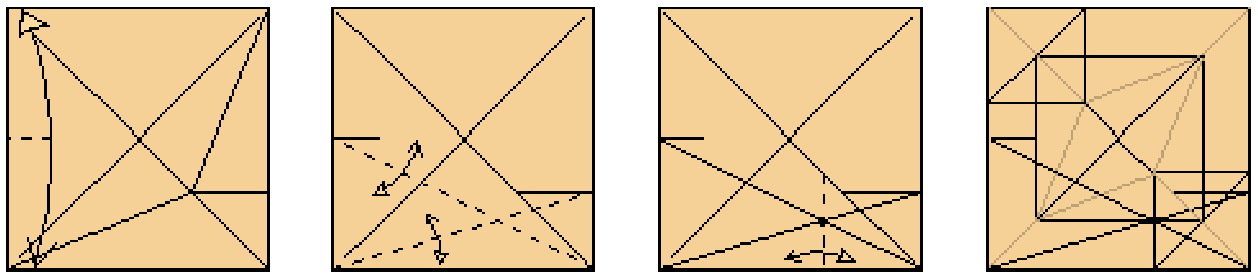


Рис. 23. Оригами - алгоритм нахождения искомой пропорции.

Самое важное, что мы делаем - это строим величину, обратную к нижней стороне, находя такие пропорции её деления, при которых две части стороны имеют легконаходимые обратные значения. В общем, если сторона квадрата выражается как $x(a + b\sqrt{2})$, где x – длина значимой линии сгиба в развёртке, и a, b рациональны, то обычно возможно найти крест-диагональный алгоритм складывания, дающий отношение x . Построение этого алгоритма равносильно нахождению числа, обратного к $(a + b\sqrt{2})$. Фокус в том, чтобы разбить отрезок $(a + b\sqrt{2})$ на две части, для которых мы сможем найти обратные величины с лёгкостью.

Целая или рациональная часть a обычно не проблема, т.к. мы всегда можем найти обратное к любому целому, используя техники построения рациональных дробей, данные ранее. Сложность появляется в нахождении легко ‘складываемой’ дроби, чья обратная содержит член $b\sqrt{2}$.

К счастью, этих дробей не так много, и мы можем легко перечислить все наиболее общие варианты. Они все находятся с помощью «складки змея» (*kite - folding*), т.е. складывания углов 22.5° . Рис. 24 изображает расстояние y , его обратное, и сгибы, определяющие желаемую пропорцию. Пунктирная линия пересекает связанную диагональ квадрата, которая может быть одной из двух.

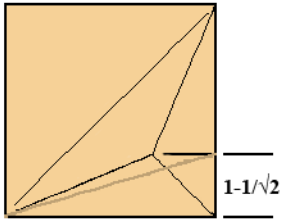
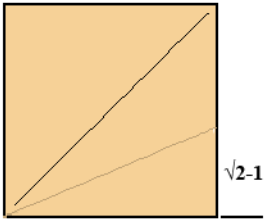
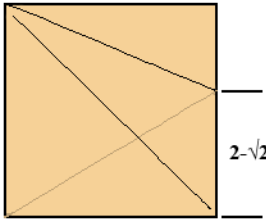
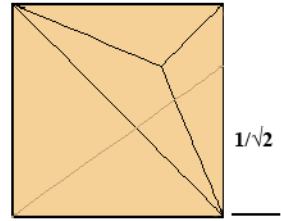
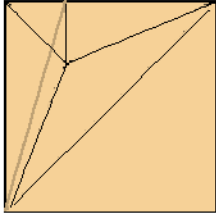
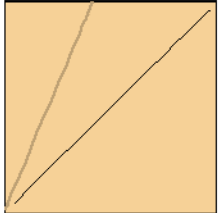
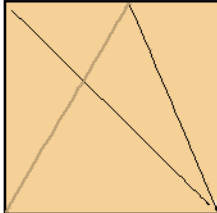
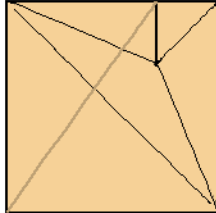
y	$1-1/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}-1$	$2-\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$1/y$	$2+\sqrt{2}$	$\sqrt{2}+1$	$1+1/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
				
y	$2+\sqrt{2}$	$\sqrt{2}+1$	$1+1/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$1/y$	$1-1/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}-1$	$2-\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
				

Рис. 24. Общие квадратичные иррациональности в оригами, обратные к ним величины, и способы ‘складывания’ прямых, заданных в отрезках на осях; отрезки численно равны значениям иррациональностей.

В этой таблице даны значения $1/y$, содержащие $\pm\sqrt{2}$; но как насчёт больших величин, кратных $\sqrt{2}$? Это легко; если вы делите дробь y на величину b перед формированием диагонали, обратное значение *возрастёт* на ту же величину.

Таким образом, алгоритм нахождения обратного к $(a + b\sqrt{2})$ в том, чтобы с помощью одной диагонали получить отрезок, содержащий $\sqrt{2}$, и затем с помощью другой - целый или рациональный отрезок. Как и для чисто рациональных конструкций предыдущих разделов, здесь есть много способов найти одну и ту же величину разными путями.

Деление углов • Angle Divisions

Менее частая, чем деление отрезков, но также важная конструктивная задача - деление углов: деление на третьи, пятые, седьмые и т.д. части. Как и деление отрезков, деление углов на число долей, равное степени 2-х, относительно просто. Можно заведомо предполагать, что, если деление отрезков в произвольном отношении выполняется простыми пошаговыми методами, то простые решения для деления в произвольном отношении углов могли бы существовать с тем же успехом. Но деление угла на «другое», *нечётное* количество долей значительно труднее, чем может казаться.

Фактически, хорошо известно, что, хотя с помощью циркуля и угольника (далее для краткости - циркуля и линейки, ЦЛ)^v любой отрезок может быть поделён в произвольном отношении и на любое количество равных долей, деление этим способом произвольного угла даже на ‘что – нибудь такое простое’ как три равные части, невозможно. ЦЛ – построения - древняя ветвь математики: исторические тексты на эту тему насчитывают более двух тысячелетий. Методы ЦЛ – решения конструктивных задач дали нам многие из инструментов оригами - построений, поэтому позвольте нам на минуту отойти от темы, чтобы рассмотреть эту область математики.

Множество людей сталкивается с задачами на ЦЛ - построения в курсе геометрии средней школы. ЦЛ – конструкции схожи с оригами в ряде моментов. В обоих случаях вы пытаетесь создать геометрические формы, и оба способа имеют строгие правила. В оригами, конечно, вы используете складывание без разрезов. В ЦЛ вы используете циркуль, инструмент для рисования кругов, и неразмеченную линейку (в нашем случае – угольник) для проведения прямых – больше ничего. Изучение геометрических построений – часть всеобщего базового образования: проведение через точку прямой, параллельной другой данной; деление угла пополам; черчение фигур таких, как равносторонний и равнобедренный прямоугольный треугольники, квадрат и др. Корни этой области математики простираются далеко в античность; решения многих задач на построение описаны ещё в *Началах* Евклида, которые были изданы около 300 г. д.н.э.

Хотя многие ЦЛ – конструкции были разработаны ещё древними, в математике существуют три «Великие задачи древности», восходящие к славным дням Афинской школы греческой математики – 400 –м годам д.н.э.; задачи эти и по сей час имеют особое значение для оригамистов. Первой великой головоломкой, о которой мы имеем исторические записи, стала задача о «*Квадратуре круга*», или *построении квадрата, равновеликого данному кругу с помощью только циркуля и линейки*. Второй была проблема «*Удвоения куба*», названная также «Делосской задачей», т.к. её постановка приписывается оракулу Аполлона в Делосе; задача в том, чтобы *построить ребро куба, объём которого в точности в два раза больше объёма данного куба*, или равносильно, *по данному отрезку построить другой отрезок, в точности равный $\sqrt[3]{2}$ длины первого*. Третья великая проблема, которой мы сейчас заинтересованы – «*Трисекция произвольного угла*». Большая часть греческой математики (и фактически, существенная часть современной) была посвящена решению этих трёх задач. Хотя в значительной степени огромное древо математической науки и выросло из преследования этих целей, всё было впустую, т.к. для всех трёх задач примерно 2200 лет спустя была доказана полная невозможность их решения циркулем и линейкой. ЦЛ позволяет строить и круги, и прямые, тогда как в оригами возможно лишь проводить складыванием прямые линии. Таким образом, ещё более удивительно, что трисекция угла (и удвоение куба тоже, как оказывается) может быть выполнено в техниках оригами!

Преимущество, которое оригами-построения имеют перед ЦЛ, кроется в характере чисел, построимых тем и другим методом. Все числа, построимые ЦЛ, выражаются «на языке» квадратных уравнений, т.е. уравнений, в которых степень неизвестного не выше 2. Имея набор отрезков заданной длины, циркулем и угольником построить можно: любую линейную комбинацию, кратное или квадратный корень этих длин. Таким образом, методом ЦЛ можно решить любое квадратное уравнение или уравнение высших степеней, приводимое к квадратному, коэффициенты которого численно равны длинам исходных отрезков.

Однако построение $\sqrt[3]{2}$ и трисекция произвольного угла требуют решения кубического уравнения, в котором старшая степень неизвестного равна 3; тогда как квадратура круга требует построения отрезка длины π , которое является трансцендентным числом, и, значит, не выражается корнем алгебраического уравнения (многочлена), и не записывается точно числом знаков меньшим, чем бесконечное. Невозможность решения этих трёх классических задач циркулем и линейкой была доказана около 200 лет назад.

«Доказательство невозможности» другого рода было дано в 1995 г. в журнале *The American Mathematical Monthly*, в статье, озаглавленной «Полностью реальное оригами и совершенно невозможное складывание» (“Totally Real Origami and Impossible Paper Folding”), в которой авторы заявили, что способны доказать невозможность удвоения куба техниками оригами [16, 17]. Фактически, они утверждали, что оригами значительно более ограничено в возможностях по сравнению с ЦЛ - построениями, и с его помощью, к примеру, невозможно построить некоторые числа вида $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ · которые построимы циркулем и угольником.

В действительности решения задач удвоения куба, трисекции угла, равно как и построения $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ и родственных чисел, были известны в оригами на протяжении многих лет. Преимущество оригами перед ЦЛ - конструкцией в том, что оригами позволяет одновременно помещать две данные точки на две различные прямые. Авторы статьи в *Monthly* рассмотрели лишь *подмножество* известных операций оригами, которое не позволяет выполнять этот вид совмещений. Однако такие совмещения двух точек с двумя линиями позволяют решать кубические уравнения, и, таким образом, точно решить две из Великих задач древности: удвоение куба и трисекцию данного угла.

Таким образом, оригами всё же *может* решать кубические уравнения, и потому может случиться, что в оригами возможна трисекция *любого* угла — полное решение третьей великой задачи. Разумеется, это возможно, и существует несколько таких конструкций. Одно решение для острого угла, входящего в прямой угол квадрата, изобретённое японским математиком и оригамистом Хисаши Абэ³ [18, 19], дано на Рис.25⁴.

³ В исходной версии статьи он был назван “Цунэ.” У меня нет предположений о происхождении такого именованя. Его имя по рождению - Хисаши. Мои извинения д-ру Абэ.

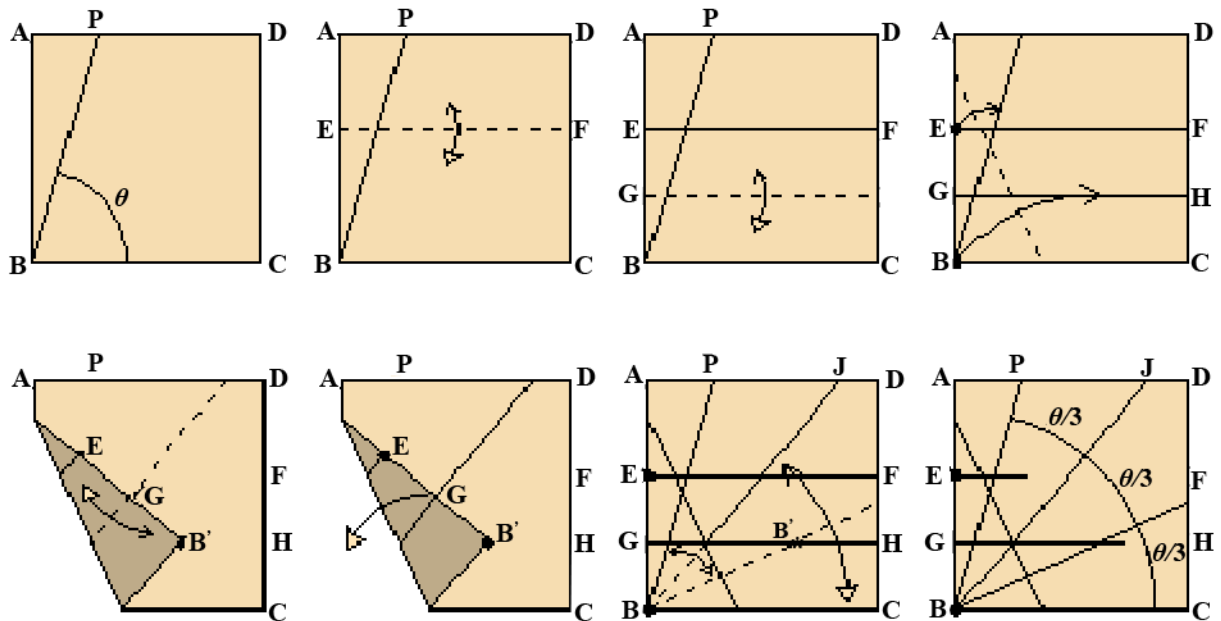


Рис.25. Трисекция произвольного острого угла методом Хисаши Абэ.

Алгоритм трисекции Абэ - следующий:

- (1) Отложите трисектируемый угол внутри одного из углов квадрата. В этом примере выполняется трисекция угла PBC .
- (2) Проложите любой сгиб, параллельный стороне BC .
- (3) Перегните сторону BC к складке EF .
- (4) Согните угол B кверху так, чтобы точка E легла на прямую BP , а сам угол B – на прямую GH .
- (5) Сложите вдоль существующей линии сгиба через точку G , складывая через оба слоя.
- (6) Разложите.
- (7) Продолжите сгиб от точки J назад к точке B . Также перегните BC к складке VJ и разверните.
- (8) Трисекция угла завершена.

Также на Рис. 2 [20] показана техника трисекции тупых углов, изобретённая французским математиком и оригамистом Жаком Жустеном. (Т.к. любой угол может быть трисектирован путём трисекции его дополнения, обе описанные техники могут применяться к плоскому углу любого вида). Техника Жустена не задействует углы

⁴ Строгое правило «одной складки за раз» требует разворачивать каждую предыдущую складку перед тем, как сделать следующую. Данная здесь схема не удовлетворяет этому правилу, но делает метод трисекции несколько проще. Если требовать абсолютной строгости, то после раскладывания результата шага 4, вы можете сделать складку VJ , продолжая сгиб от угла B через отмеченную точку B' на прямой GH .

квадрата, и изображена в центре «бесконечного листа». Ключевой момент наблюдения - заметить, что обе эти техники включают одинаковый тип совмещения точек и линий.

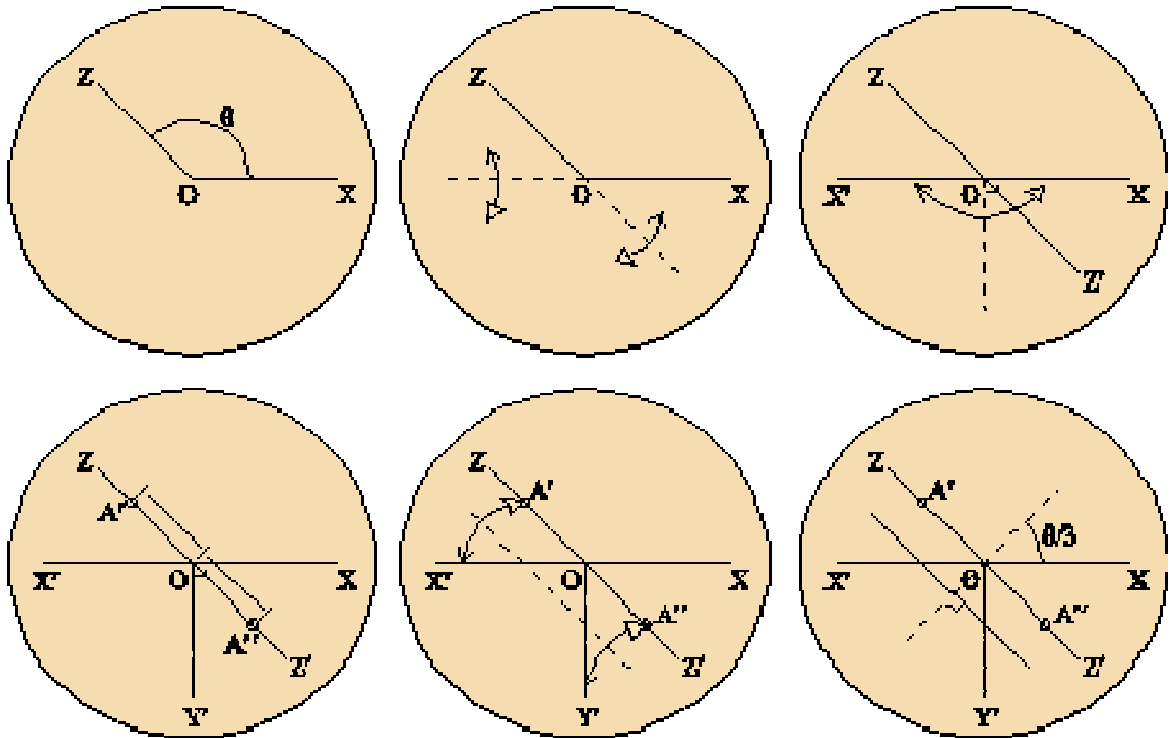


Рис.26. Техника трисекции тупого угла Жака Жустена.

Трисекция Жустена выполняется так:

- (1) Трисектируемый угол - θ .
- (2) Продлите линии ZO и XO.
- (3) Сложите X к X' через точку O.
- (4) Отметьте точки A' и A'' на прямых ZO и Z'O на равных расстояниях от т. O.
- (5) Перегните так, чтобы тт. A' и A'' легли на прямые X'O и Y'O соответственно.
- (6) Для завершения трисекции проложите перпендикуляр к последней сделанной складке через т. O.

Трисекция и бисекция угла могут сочетаться для получения различных целых разбиений единичного круга, что равносильно построению правильного N - угольника, где N – число вида $2^n 3^m$ (). Таким образом, используя только складывание, возможно разделить произвольный угол на равные части количеством 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, и т.д.

Для деления полного круга на N равных частей существует и другой специальный вид оригами - построений, открытый австрийским математиком Робертом Геретшлегером [21–24], который основан на геометрических конструкциях, датированных 1890 –ми [25]. Он показал общий подход к построению правильного N -угольника, где N – простое число вида $2^n 3^m + 1$. Числа такого вида - 3, 5, 7, 13, 17... Эта конструкция может быть так же

комбинирована с бисекцией и трисекцией угла, давая другие многоугольники вида $2^j 3^k (2^n 3^m + 1)$, даже если выражение в скобках - простое число. Хотя полное описание подхода Геретшлегера простирается далеко за рамки этой статьи, ссылки в конце этой работы иллюстрируют несколько частных случаев и общий подход. Единственный N -угольник, непостроимый этим методом при $N \leq 20$ - одиннадцатиугольник ($N=11$).

Точные построения для равночастного деления углов относятся к разряду «математических подвигов», *tours de force* – но, как правило, они чрезвычайно сложны и совершенно непрактичны для оригами – дизайнера; при попытке использования на практике они покрывают бумагу множеством пересечений, и как следствие, требуют неаккуратного «грязного» складывания: построения длинных узких треугольников, экстраполяции расстояний с помощью сгибов и копирования переносом равных углов и отрезков.

Однако, как мы видели для деления стороны, в целях практики приближение может быть также хорошо, или даже лучше, чем общее решение. Фактически, аппроксимация углов и отрезков взаимосвязаны, и мы можем использовать разбиения стороны, чтобы построить приближения для равных частей угла.

Пример из моей собственной работы проиллюстрирует этот процесс. В моей книге, *The Complete Book of Origami*, модель скорпиона на ранней стадии сборки требовала деления угла 90° на седьмые части [26]. Такое построение не представляет страшной сложности, если применить «метод научного тыка» (веером сложить угол всемеро, и последовательно выравнивать края, пока все доли не станут равными), но мы также можем найти другое приближённое решение, вполне определённое и точное в пределах заданной погрешности.

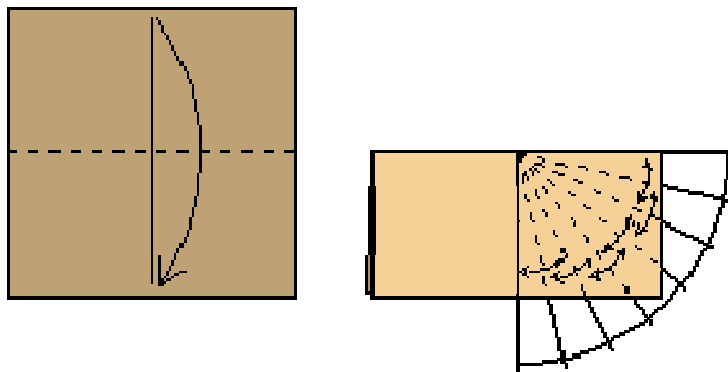


Рис.27. Первые два шага сборки скорпиона Ланга, требующие деления угла на 7° доли.

Итак, мы можем подойти к задаче двумя путями: попробовать разделить на 7° собственно угол, или попробовать найти точки, в которых один или более сгибов пересекает край листа. Если мы подойдём к последнему разумно, мы должны будем найти только одну такую точку; если, к примеру, мы нашли точку, задающую сторону $4/7$ угла, мы должны затем лишь последовательно разделить полученный угол пополам, получив $2/7$ и $1/7$, и далее – все оставшиеся доли данного угла чистым складыванием.

Далее, существует не слишком простое алгебраическое выражение для определения местоположения, т.е. *локации* этих точек, но, применив немного школьной тригонометрии, мы можем вычислить, где сгибы пересекут стороны; десятичные значения ординат искомых точек показаны на квадрате, Рис 28. Расстояния, выраженные долями единичной стороны квадрата, даются формулой

$$y_i = \frac{1}{2} \left(1 + \tan \frac{90^\circ}{7} i \right), \quad (40)$$

где i – индекс угла, показанный на рисунке^{vi}.

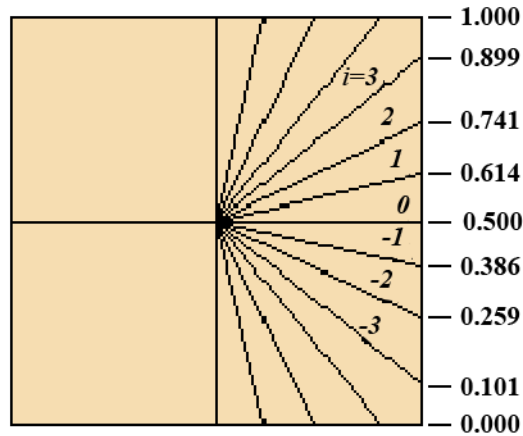


Рис. 28. Пересечения сторон 7^x долей угла со сторонами квадрата.

Любая из этих долей может быть приближена двоичным методом или рациональной дробью, выведенной из конвергентов цепной дроби. Замечая, что $y_1 = 0.101 \approx 1/10$, приходим к цепочке складывания, показанной на Рис. 29.

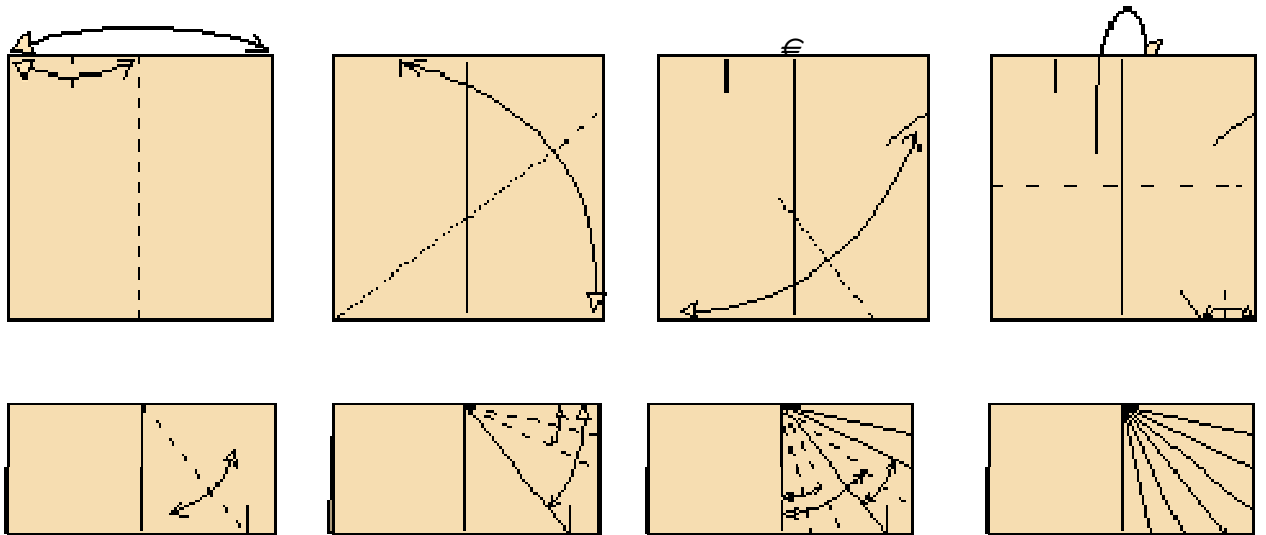


Рис. 29. Алгоритм складывания для деления центрального прямого угла 90^0 на 7^e доли.

Также возможно использовать итеративную аппроксимацию (последовательное приближение) для приближения любой доли угла, применяя двоичный метод – деление

пополам, по аналогии с делением отрезков, задействующий всегда выполнимую бисекцию угла. Если мы продолжим лучи углов до пересечения со сторонами квадрата, мы создадим естественную взаимосвязь между сгибами, делящими стороны, и секторами углов, как показано на Рис. 30.



Рис. 30. Деление угла с помощью бисекции соответствует двум операциям, составляющим двоичный метод.

Мы можем применять действия Рис. 30 согласно двоичному представлению дроби r , чтобы разделить угол в отношении $(r:1-r)$. Для недвоичных дробей, таких как $1/3$, итеративный метод деления задаётся двоичным бесконечным периодическим выражением дроби. Так, к примеру, построение одной 7^{-i} доли угла, имеющей бинарное представление

$$\frac{1}{7} = \overline{.001}, \quad (41)$$

может быть выполнено последовательным повторением процедуры (*лево, лево, право*), где “лево” и “право” отсылают нас к двум сторонам делимого угла.

Аксиоматическое оригами • Axiomatic Origami

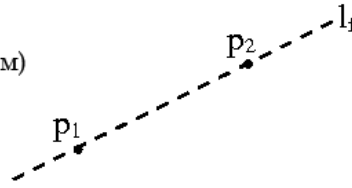
Методы складывания, которые я описал ранее, используют в различных комбинациях одни и те же базовые действия: перегнуть точку к другой точке, линию – к другой линии (проведение параллели или бисекция угла), провести сгиб через одну или две точки. Начиная с 1970-х, ряд оригамистов начали систематизировать всевозможные комбинации сгибов с целью изучить, какие типы расстояний можно построить, сочетая сгибы различными способами. Первая систематическая теория складывания принадлежит Фумиаки Хузита [27–29], который описал набор шести базовых способов однозначно определить прямую, т.е. линию сгиба, различными комбинациями совмещений существующих точек, линий и собственно линии сгиба. Эти шесть действий стали известны как “Аксиомы Хузита” (Huzita’s Axioms, HA), хотя лучше рассматривать их как операции, действующие над точками и прямыми. Имея набор точек и линий на листе бумаги, с помощью операций Хузита можно строить новые прямые; пересечения новых и старых линий создают добавочные точки. Расширенное таким образом множество точек и прямых может расширяться и дальше при последовательном повторении действий Хузита, создающих новые элементы и их комбинации. Множество точек, построимых методическим применением HA к некоему исходному набору элементов — обычно углам

и сторонам единичного квадрата — представляет как академический, так и практический интерес. С академической стороны было показано, что НА могут использоваться для построения расстояний, численно равных корням кубического уравнения, с помощью последовательности из нескольких сгибов. В частности, существуют изящные математические оригами - конструкции решений двух из трёх Великих задач древности, неразрешимых циркулем и неразмеченной линейкой: трисекции угла, с которой мы уже знакомы, и удвоения куба [30], с которым мы встретимся вскоре. С практической стороны, НА могут дать как точные, так и приближённые низкоранговые оригами - последовательности решения задач на построение.

Особенно точный и ясный список аксиом НА дан в [31]. Как уже было сказано, несмотря на название “аксиомы”, их лучше воспринимать как фундаментальные операции, действующие над точками и прямыми, чтобы создать новую прямую, являющуюся линией сгиба. Шесть операций, определённых Хузита, показаны на Рис. 31.

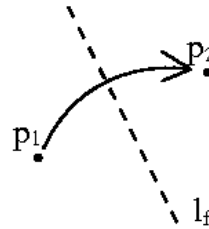
- (O1) Задавшись двумя точками P_1 и P_2 , возможно соединить их прямой (сгибом)

(\exists сгиб, соединяющий две точки)



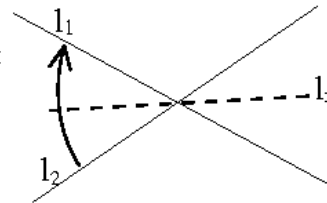
- (O2) Задавшись двумя точками P_1 и P_2 , возможно сгибом наложить одну точку на другую

(\exists сгиб, совмещающий две точки)



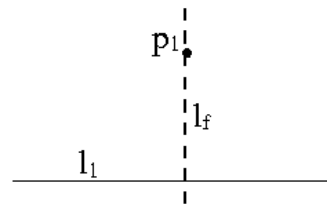
- (O3) Имея две прямые l_1 и l_2 , мы можем совместить эти прямые сгибом

(\exists сгиб, совмещающий две прямые)



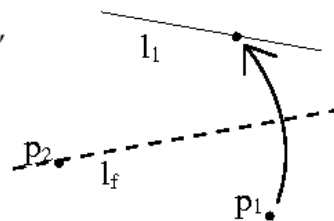
- (O4) Имея произвольные точку P_1 и прямую l_1 , возможно провести перпендикуляр к данной прямой через данную точку.

(\exists сгиб, проходящий через данную точку и перпендикулярный данной прямой)



- (O5) Имея две точки P_1 и P_2 , и прямую l_1 , возможно поместить т. P_1 на пр. l_1 сгибом, проходящим через т. P_2 .

(\exists сгиб, проходящий через данную точку и помещающий другую точку на данную прямую)



- (O6) Задавшись двумя прямыми l_1 и l_2 , и двумя точками P_1 и P_2 , мы можем найти сгиб, одновременно помещающий P_1 на l_1 , и P_2 на l_2 .

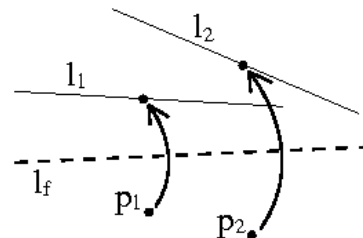


Рис. 31. Аксиомы Хузита – шесть фундаментальных действий.

Как мы увидим, действия O1–O5 могут использоваться для построения решения любого квадратного уравнения с рациональными коэффициентами. Операция O6 уникальна в том, что она позволяет решать построением общие кубические уравнения.

В 2003 г. 7^е действие было определено Коширо Хатори [32], обозначим его (O7). Действие показано на Рис. 32.

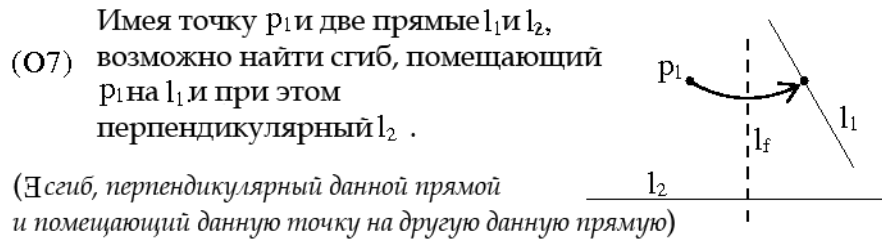


Рис. 32. 7^я аксиома Хатори.

Хатори отметил, что эта операция не эквивалентна ни одной из «аксиом» НА. Аксиома Хатори O7 позволяет решать произвольные квадратные уравнения (что равносильно построению этих решений методом ЦЛ).

⁵Как оказалось, аксиома O7 не была полностью новой; все 7 аксиом были определены в статье Жака Жустена [37], которая появилась в том же источнике, что и исходный список Хузита. Список Жустена, как видится, до недавнего времени выпадал из поля зрения многих авторов, включая автора этой работы (возможно, потому, что список этот был написан на французском).

Если теперь мы назовём полученную систему аксиом оригами – построений «Аксиомы Хузита – Жустена» (Huzita-Justin Axioms⁶, HJA), то оказывается, что эта система *полна*^{vii}; все аксиомы суть операции, определяющие единственный сгиб совмещениями точек с конечными отрезками прямых линий. В следующей главе я докажу полноту этой системы⁷.

Введение • Preliminaries

Доказательство полноты и вывод опираются, в частности, на подсчёт степеней свободы в системе операций. Этот параграф нацелен на создание алгебраического описания точек, линий и действий над ними, т.е. здесь мы полностью переводим складывание на язык алгебры.

Определение: *точка P* есть упорядоченная пара (x, y) в пространстве \mathcal{R}^2 , где $x \in [-\infty, \infty]$, $y \in [-\infty, \infty]$.

⁵ Это целиком новый параграф в версии 2010 года.

⁶ Ранее – аксиомы Хузита - Хатори (Huzita-Hatori Axioms, HHA).

⁷ Несколько более строгое доказательство этой полноты может быть найдено в [38].

Заметим, что точка имеет 2 степени свободы (*degrees of freedom*, DOF), т.е., два параметра, могущих изменяться независимо, а именно, две координаты.

С линиями чуть более сложно; прямая может определяться несколькими различными путями. Одна возможность следует из аксиомы O1, отвечающей евклидовой аксиоме «через любые две точки можно провести только одну прямую». Т.к. каждая точка определена двумя координатами, такое определение могло бы требовать четырех координат (двух координатных пар) для задания всякой прямой. Однако такое определение не единственное; достаточно двух произвольно заданных точек.

Второе, более скупое и рациональное определение предлагается в школьном курсе алгебры уравнением прямой в декартовых координатах: $y = mx + b$, где m – угловой коэффициент и b отрезок на оси y , и т.о. линия определена как геометрическое место всех точек (x, y) , удовлетворяющих этому уравнению. Это выражение проясняет то, что прямая, как и точка, имеет две DOF; двух значений m и b достаточно, чтобы единственным образом описать почти любую прямую.

Недостаток использования уравнения в декартовых координатах в том, что оно не определяет однозначно прямые, параллельные оси y (эти прямые имеют бесконечный угловой коэффициент m , и таким образом отрезок b неопределён). Более практично для описания наших прямых применить параметризацию, не дающую бесконечных значений, и трактующую все прямые в некотором смысле «равно».

Я нашёл полезным описать прямую бивектором – перпендикуляром к прямой, и точкой на этой прямой, согласно следующему:

Определение: Определим направленный единичный вектор $U(\alpha)$ как

$$U(\alpha) \equiv (\cos \alpha, \sin \alpha) \text{ для } \forall \alpha \in [0, 180^\circ]. \quad (42)$$

Определение: Прямая $L(d, \alpha)$ – это множество всех точек P , удовлетворяющих уравнению

$$(P - dU(\alpha)) \cdot U(\alpha) = 0, \quad (43)$$

для любых $d \in [-\infty, \infty]$, $\alpha \in [0, 180^\circ]$, и $A \cdot B$ обозначает скалярное произведение векторов A и B . Несложно показать, что любая так определённая прямая задаётся единственной комбинацией параметров (d, α) . Также легко показать, что уравнение (43) равносильно

$$P \cdot U(\alpha) - d = 0. \quad (44)$$

Удобная параметризация прямой $L(d, \alpha)$ даётся следующим:

Определение: Для данного вектора $P = (x, y)$, перпендикулярный ему вектор P^\perp определён как

$$P^\perp \equiv (y, -x). \quad (45)$$

Вектор P^\perp есть исходный вектор P , претерпевающий поворот на 90° против часовой стрелки. Для упрощения записи я обозначу $(U(\alpha))^\perp \equiv U^\perp(\alpha)$.

Тогда легко выводится, что любая точка P на прямой $L(d, \alpha)$ может быть выражена в форме

$$P = dU(\alpha) + tU^\perp(\alpha) \text{ для некоторого } t \in [-\infty, \infty]. \quad (46)$$

Геометрическая интерпретация уравнения (46) дана на Рис. 33. Точка $dU(\alpha)$ есть точка на нашей прямой, ближайшая к началу координат; слагаемое $tU^\perp(\alpha)$ смещает точку $dU(\alpha)$ вдоль прямой на расстояние t , которое может быть отрицательным или положительным.

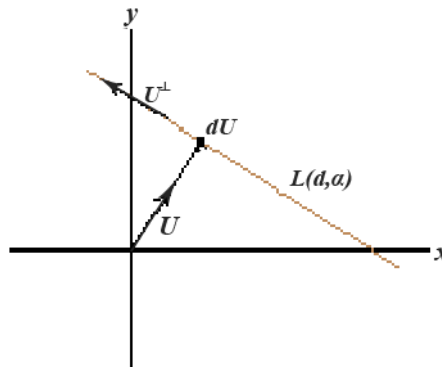


Рис. 33. Геометрическая интерпретация параметризации уравнения (44).

Каждая точка вида (44) удовлетворяет уравнению (42), и наоборот; таким образом, каждое из них может использоваться как определение прямой.

Складывание • Folding

Складка на листе бумаги определяется прямой, называемой *линией сгиба*. Линия сгиба^{viii} (ЛС) делит бумагу на две области - полуплоскости. По одну сторону линии – стационарный регион, по другую - подвижный. Выбор стационарного и подвижного регионов полностью произволен, и эти названия служат только в целях способствовать интуитивному пониманию.

Когда сгиб выполнен, все элементы подвижной области (т.е. их координаты), отражены относительно линии сгиба, что обозначим как $L_F(d_F, \alpha_F)$.

Т.к. складка пролегает по прямой, а прямая имеет две DOF (т.е., параметры d_F и α_F), то это позволяет с их помощью полностью определить линию сгиба (ЛС).

Для простоты обозначений в дальнейшем я положу $U_F \equiv U(\alpha_F)$.

Если линия сгиба задана как $L_F(d_F, \alpha_F)$, тогда точка P на подвижной полуплоскости после складывания перейдет в точку P' , заданную как

$$\begin{aligned} P' &= P - 2((P - dU_F) \cdot U_F)U_F \\ &= P + 2(d_F - P \cdot U_F)U_F \end{aligned} \quad (47)$$

Обозначим результат движения точки P как $F(P)$. Это значит, что

$$F(P) \equiv P + 2(d_F - P \cdot U_F)U_F. \quad (48)$$

Относительно просто проверить два следующих тождества:

$$\text{Для любой точки } P: F(F(P)) = P, \quad (49)$$

что просто утверждает тот очевидный факт, что перемещение точки назад и вперёд относительно одной и той же ЛС оставляет её локацию неизменной.

Также, для любой точки P на линии сгиба $L_F(d_F, \alpha_F)$,

$$F(P) = P, \quad (50)$$

что означает то, что точка на линии сгиба сохраняет свою позицию при складывании. Т.е. локация одной и той же точки на листе относительно ЛС, или на ней самой, инвариантна относительно действия складывания, которое геометрически является *наложением*.

Мы также определим результат воздействия складыванием на прямую. Для прямой L мы обозначим $F(L)$ множество всех точек $F(P)$ таких, что (а) точки P удовлетворяют уравнению (44), (б) точки P лежат в подвижной полуплоскости листа.

Совмещения • Alignments

Сейчас мы опишем, что значит «совместить два элемента», используя линию сгиба.

Единичное совмещение - это наложение двух элементов, т.е. приведение их в частичное или полное соприкосновение. У нас есть два типа элементов: точки и прямые. В первую очередь мы должны определить, что будет называться их совмещением.

Совмещение точки с точкой $P \leftrightarrow P$

Две точки $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ и $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ называются *совмещенными*, если их координаты попарно равны. Мы обозначаем совмещение двусторонней стрелкой: $P_1 \leftrightarrow P_2$. Т.е.,

$$P_1 \leftrightarrow P_2 \text{ тогда и только тогда, когда } x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2. \quad (51)$$

Т.к. оба уравнения должны быть удовлетворены, совмещение двух точек требует двух степеней свободы (DOF).

Совмещение точки с прямой ($P \leftrightarrow L$)

Точка $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ is называется совмещённой с прямой $L(d, \alpha)$ тогда и только тогда, когда она лежит на этой прямой, т.е., если P_1 удовлетворяет уравнению (44). Мы обозначим совмещение точки и прямой так же: $P_1 \leftrightarrow L(d, \alpha)$. Т.е.,

$$P_1 \leftrightarrow L(d, \alpha) \text{ тогда и только тогда, когда } P_1 \cdot U(\alpha) - d = 0. \quad (52)$$

Т.к. должно быть удовлетворено только одно уравнение, совмещение точки с прямой требует только одной DOF.

Заметим, что оператор совмещения по определению коммутативен; т.е., для различных операндов,

$$P_1 \leftrightarrow L(d, \alpha) \text{ тогда и только тогда, когда } L(d, \alpha) \leftrightarrow P_1. \quad (53)$$

Совмещение двух линий ($L \leftrightarrow L$)

Две прямые $L_1(d_1, \alpha_1)$ и $L_2(d_2, \alpha_2)$ называются совмещёнными друг с другом, если и только если каждая точка прямой L_1 совмещена с какой – либо точкой L_2 , и наоборот.

Для простоты записи обозначим $U_1 \equiv U(\alpha_1)$, $U_2 \equiv U(\alpha_2)$. Тогда если мы выберем параметризацию уравнения (46), чтобы определить прямую L_1 , т.е. зададим точку P_1 на прямой L_1 уравнением

$$P_1 = dU_1 + tU_1^\perp, \quad (54)$$

для некоторых (d, t) , то совмещение двух прямых означает, что каждая такая точка P_1 должна удовлетворять уравнению (44), а именно:

$$(d_1U_1 + tU_1^\perp) \cdot U_2 - d_2 = 0. \quad (55)$$

Небольшая перегруппировка даёт

$$(d_1(U_1 \cdot U_2) - d_2) + t(U_1^\perp \cdot U_2) = 0. \quad (56)$$

Левая часть уравнения (56) линейна относительно t ; чтобы уравнение было удовлетворено при всех t , и линейная часть, и константа должны по отдельности равняться 0. Таким образом:

$$\left. \begin{aligned} d_1(U_1 \cdot U_2) - d_2 &= 0, \\ U_1^\perp \cdot U_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$(58)$$

Следовательно, чтобы две прямые совместились, должно быть удовлетворено два уравнения и требуется две DOF – степени свободы.

Система (57)-(58) геометрически означает, что уравнение (58) требует параллельности прямых, а (57) требует их пересечения.

Фактически, легко может быть показано, что если две прямые пересекаются в одной точке, то для определения совмещения прямых достаточно уравнения (58).

Совмещения складыванием • Alignments by folding

В предыдущей главе мы определили три базовых типа совмещений: $P \leftrightarrow P$, $P \leftrightarrow L$, $L \leftrightarrow L$. Я перечислю сейчас все возможные совмещения, которые можно создать, сделав один сгиб. Такие совмещения могут происходить между заранее существующими на нашем листе элементами, или могут задействовать элементы – результаты складывания, а именно, линии сгибов и их пересечения.

Мы принимаем во внимание (и пропускаем сейчас) совмещения двух заранее существующих элементов, которые оба подвижны или оба статичны. Любые такие совмещения не создаются складыванием, и потому не могут использоваться для локации ЛС. Оставшиеся, интересующие нас классы совмещений также действуют между двумя элементами, один из которых подвижен, а другой - стационарен, и между ранее существовавшими, заданными элементами и линиями сгиба.

Рассмотрим первый класс совмещений двух данных элементов, один из которых на подвижной стороне листа, а другой – на статичной. В этом случае возможны 5 видов совмещений, приведённых в Таб. 9.

Обозначение	Описание	Кол-во уравнений
$F(P_1) \leftrightarrow P_2$	Совместить т. P_1 с другой т. P_2	2
$F(P_1) \leftrightarrow L$	Совместить т. P_1 с прямой L	1
$F(L) \leftrightarrow P$	Совместить прямую L с т. P	1
$F(L_1) \leftrightarrow L_2$	Совместить L_1 с другой прямой L_2	2
$F(L) \leftrightarrow L$	Совместить прямую L с собой самой	1

Таб. 9. 5 различных нетривиальных способов совмещений между точками и прямыми.

Мы должны различать последние два случая, поскольку совмещение двух различных линий требует удовлетворения двух условий (уравнения (15) и (16)), тогда как при наложении прямой на себя, сама линия и её образ при складывании совпадают с линией сгиба; таким образом достаточно удовлетворить уравнению (16).

Второй набор совмещений содержит совмещения между заданными элементами и ЛС. Есть две возможности: совмещение точки с ЛС, и совмещение прямой с ЛС. Последний случай тривиален; складывание вдоль существующей линии не создаёт новых элементов. Поэтому единственный нетривиальный случай – совмещение точки с линией сгиба, показанное в Таб.10.

Обозначение	Описание	Число уравнений
$P \leftrightarrow L_F$	Поместить т. P на ЛС L_F	1

Таб.10. Единственное нетривиальное совмещение второго класса – между точкой и ЛС.

Это завершает список нетривиальных совмещений, которые могут быть созданы одним сгибом.

Множественные совмещения • Multiple Alignments

Сейчас мы займёмся определением линии сгиба с помощью совмещений; т.е., задавая одно или более совмещений, мы полностью определяем локацию ЛС (или равносильно, два её параметра d_F и α_F). Это требует, чтобы мы имели количество уравнений, описывающих совмещения, равное количеству неизвестных: два. Мы находим, что у нас есть два типа совмещений, каждое из которых описывается двумя уравнениями. Это - совмещения типов $F(P_1) \leftrightarrow P_2$ (точка к точке), и $F(L_1) \leftrightarrow L_2$ (линия к линии). Двух этих совмещений по отдельности достаточно, чтобы определить линию сгиба; они отвечают аксиомам Хузита O2 и O3, соответственно, и даны в Таб. 11.

$F(P_1) \leftrightarrow P_2$	O2
$F(L_1) \leftrightarrow L_2$	O3

Таб. 11. Два действия, определяющие 2 степени свободы (DOF) и аксиомы Хузита, им соответствующие.

Другие 4 совмещения задают только по одному уравнению; мы должны поэтому брать их попарно, составляя системы двух уравнений для того, чтобы полностью определить прямую - ЛС. При четырёх возможных совмещениях есть 10 возможных различных пар (т.к. порядок безразличен^{ix}), которые сведены в Таб.12.

	$F(P_2) \leftrightarrow L_2$	$F(L_2) \leftrightarrow P_2$	$F(L_2) \leftrightarrow L_2$	$P_2 \leftrightarrow L_F$
$F(P_1) \leftrightarrow L_1$	O6			
$F(L_1) \leftrightarrow P_1$	O6	O6		
$F(L_1) \leftrightarrow L_1$	O7	O7	H B	
$P_1 \leftrightarrow L_F$	O5	O5	O4	O1

Таб. 12. Возможные пары совмещений, определяющие единственный сгиб, и соответствующие им аксиомы HJA.

Одна из комбинаций, ($F(L_1) \leftrightarrow L_1, F(L_2) \leftrightarrow L_2$) не определяет прямых, если L_1 и L_2 непараллельны, и задаёт их бесконечно много, если $L_1 \parallel L_2$. Каждая из оставшихся пар отвечает ровно одной из аксиом Хузита - Хатори. Так как они отображают все возможные совмещения, создающие в точности 2 степени свободы – DOF (и соответственно, все возможные способы задать прямую при выбранной параметризации), это показывает, что система аксиом HJA *полна* (и таким образом разумеется, 7-я аксиома Хатори необходима для полноты), *ч.т.д.*

Построимость • Constructability

Записать явное выражение параметрической пары (d_F, α_F) , задающей прямую – линию сгиба в терминах шести из семи НЖА – операций, действующих над исходными точками и прямыми, достаточно просто. Каждая из них требует решения уравнений не более сложных, чем квадратные, и конечно, эти шесть операций могут использоваться для построения точных решений любых квадратных уравнений с рациональными коэффициентами.

Однако, операция Об— «две точки к двум линиям» — более усложнена. Аналитическое нахождение ЛС в этом случае требует решения кубических уравнений, и это значит, что с помощью этого действия можно строить решения любых таких уравнений в точности.

Возможно, самый знаменитый пример решения кубического уравнения складыванием – решение второй Великой задачи об удвоении куба, принадлежащее Петеру Мессеру — точнее, построение двух отрезков, чьи длины соотносятся с коэффициентом $\sqrt[3]{2}$. Эта чудесная и простая конструкция была представлена в [30], и она воспроизведена на Рис.34. Квадрат делится на трети горизонтальными складками. Далее квадрат перегибается так, что точки P_1 and P_2 переходят на прямые L_1 (левая сторона) и L_2 (верхняя горизонтальная складка). Точка на левой стороне, с которой совпала вершина угла P_1 , делит эту сторону в желаемом отношении.

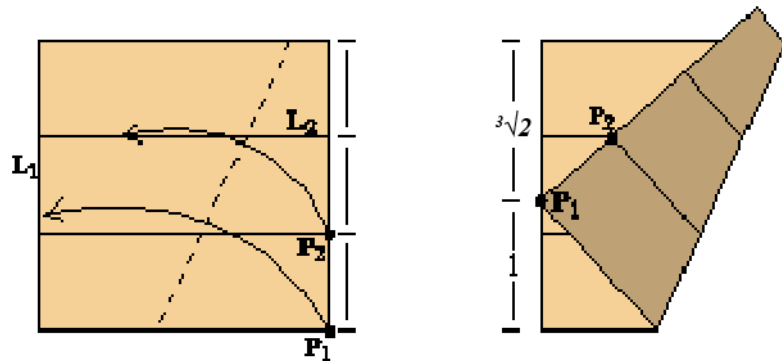


Рис. 34. Построение $\sqrt[3]{2}$ Петера Мессера.

Фактически, Аксиома Об связана с рядом интересных ветвей математики, и таким образом заслуживает более тщательного изучения.

6-я Аксиома и кубические кривые • Axiom 6 and Cubic Curves

Шестая аксиома утверждает, что, задавшись любыми двумя точками и двумя прямыми на листе бумаги, возможно сгибом одновременно поместить обе точки на обе линии. Это обобщение неполно; оказывается, что для некоторых комбинаций точек и линий это не всегда возможно, а для других это построение неоднозначно, т.е. возможно более чем одним способом. Нам следует рассмотреть все возможные комбинации точек P_1 , P_2 и

прямых L_1, L_2 . Для упрощения исследования мы перейдём к новой системе координат, в которой прямая L_1 станет осью x , так что

$$d_1 = 0, U_1 = (0,1). \quad (59)$$

Подобным образом мы можем предполагать без потери общности, что точка P_1 расположена как

$$P_1 = (-1,0). \quad (60)$$

Также положим, что прямая L_1 статична, а т. P_1 подвижна.

Сейчас мы рассматриваем линию сгиба L_f , характеризованную параметрами d_f и a_f , так что

$$U_f = (a_f, \sqrt{1-a_f^2}). \quad (61)$$

Определим точку P'_1 как образ т. P_1 относительно ЛС L_f , и тогда

$$\begin{aligned} P'_1 &= F(P_1) \\ &= P_1 + 2(d_f - P_1 \cdot U_f)U_f \end{aligned} \quad (62)$$

Если мы требуем, чтобы ЛС L_f помещала т. P'_1 на прямую L_1 , то уравнение (44) должно быть удовлетворено, т.е.,

$$P'_1 \cdot U_1 - d_1 = 0. \quad (63)$$

Подстановка (59–62) в (63) и решение уравнения относительно d_f даёт

$$d_f = \frac{2a_f^2 - 1}{2\sqrt{1-a_f^2}}, \quad (64)$$

и для задания ЛС остаётся только выбрать оставшийся свободный параметр (a_f).

Для любого значения a_f произвольная точка P_2 имеет образ P'_2 , получающийся складыванием по линии сгиба. Если для данной точки P_2 мы варьируем a_f в его границах от -1 до 1 включительно, т. P'_2 замечает на плоскости кривую. Две таких кривых для точек $P_2 = (2, -1.5)$ и $P_2 = (2, +1.5)$ изображены на Рис. 35.

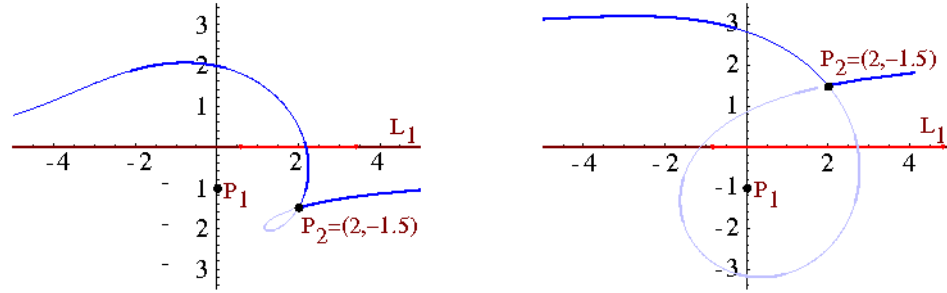


Рис. 35. ГМТ точек, заметаемых т. P_2 при изменении параметра в границах $a_f \in [-1; 1]$ для двух позиций точек P_2 .

Вопрос, существует ли ЛС, помещающая т. P'_2 на данную прямую L_2 , разрешается тем, где и сколько раз прямая L_2 пересекает кривую, описываемую т. P'_2 . Таким образом, полезно вывести уравнение для этой кривой.

Если мы положим

$$P_2 \equiv (a, b), \quad (65)$$

$$P'_2 \equiv (x, y), \quad (66)$$

и решим уравнения относительно координат P'_2 , мы найдём, что

$$x = a - 2aa_f^2 + \frac{a_f(2a_f^2(1+b) - (1+2b))}{\sqrt{1-a_f^2}}, \quad (67)$$

$$y = 2aa_f\sqrt{1-a_f^2} + (2a_f^2 - 1)(1+b). \quad (68)$$

Исключение a_f из обоих уравнений даёт уравнение искомой кривой, заметаемой P'_2 :

$$y^3 + (1-b)y^2 + (x^2 - b(2+b) - a^2)y + (b^3 + b^2 + a^2b - a^2 + 2ax - x^2 - bx^2) = 0. \quad (69)$$

Уравнение (69) содержит члены y максимум в кубе, члены x - в квадрате, и вообще не содержит членов со старшей степенью выше 3; это кубическая кривая - тип кривой, возникающий во многих ветвях математики.

Рис. 35 иллюстрирует ряд характерных свойств таких кривых, которые могут быть выведены из уравнения (69).

- Если $a_f \rightarrow \pm 1$, кривая приближается к асимптотам $(\pm\infty, 1+b)$.
- Обычно она содержит петлю (выделена светлым на Рис.35); узел петли находится в точке $P_2 = (a, b)$.

- Любая прямая L_2 пересекает кривую максимум в 3-х точках; т.о., существует максимум 3 возможных способа поместить т. P_2 на L_2 . Если L_2 пересекает кривую только в одном месте, существует лишь 1 возможное совмещение; и если прямая L_2 минует кривую полностью, возможных совмещений не существует.

Если мы произведём замену переменных в уравнении нашей кривой,

$$\begin{aligned}x &\rightarrow x + a \\y &\rightarrow y + b\end{aligned}\tag{70}$$

то оно принимает однородный вид

$$y^3 + (1 + 2b)y^2 + y(2a + x)x = x^2,\tag{71}$$

и в особом случае $b = -1/2$ описывает кривую, называемую *офиурidou* [33], а в случае $a = 0$, $b = -1/2$ – *циссоиду Диокла* [34].

Я неявно предполагал в предшествующем анализе, что прямая L_2 была статичной, а т. P_2 – подвижной; чтобы быть состоятельными в этом предположении, для каждой линии сгиба L_2 мы должны удостовериться, что обе точки P_1 и P_2 лежат по одну и ту же сторону ЛС. Можно показать, что это условие сохраняется везде вдоль кривой, включая узел, кроме самой петли; таким образом, только ‘чёрная’ часть кривой отвечает множеству физически возможных совмещений.

Как было сказано, мы можем использовать эту кривую (и данное совмещение) для решения общих кубических уравнений. Если мы приравняем уравнение (26) к общему кубическому,

$$y^3 + ry^2 + sy + t,\tag{72}$$

и уравняем коэффициенты, то можем найти (по) два решения для a , b , и x , которые оказываются довольно сложными алгебраическими выражениями, но содержат только квадратные корни. Для частного случая

$$y^3 - 2 = 0,\tag{73}$$

мы находим два возможных решения:

$$P_2 = (a, b) = (\pm 1, 1), \quad x = \pm 2.\tag{74}$$

Значит, одно решение $\sqrt[3]{2}$ даётся одновременным помещением P_1 на L_1 и $P_2 = (1, 1)$ на вертикальную прямую $x = 2$, как показано на Рис. 36, тогда как другое решение есть зеркальный образ первого. Ордината y точки P_2' определяет искомое отношение.

решениям с помощью двух сгибов. Точки пересечения выделены цветом; отсюда нахождение сгибов, требуемых для построения, достаточно просто. Без помощи кубических кривых нахождение всех пяти решений эмпирически, методом проб и ошибок, довольно сложно.

Можно найти как минимум 7 точек пересечения между двумя такими кривыми, что указывает на то, что задаваемый таким построением многочлен может быть как минимум 7-й степени. Хотя этот аргумент и не обращается к вопросу о приводимости всех таких многочленов, но при данной общности рассмотрения утверждение «да» или «нет» выглядит некорректно. Этот вопрос в значительной мере открыт, как и вопрос о том, для каких многочленов общего вида высших порядков задача нахождения корней может быть переведена «на язык» складывания.

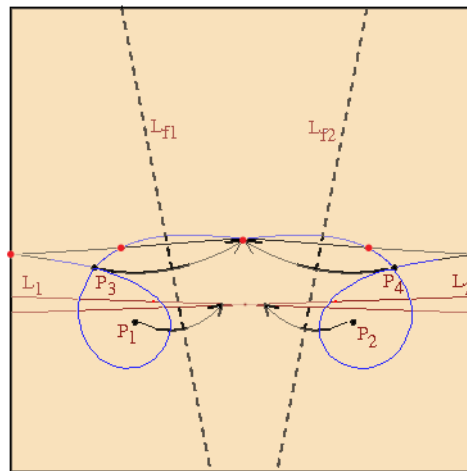


Рис. 37. Двусгибное построение, определяющее пересечение двух кубических кривых.

Компьютерные приближения • Approximation by Computer

Как мы увидели, возможно приблизить любой отрезок на стороне квадрата с произвольной точностью. Естественно, что подобным образом можно задать любую точку внутри квадрата; всё, что нужно – это задать x - и y - координаты точки на смежных сторонах, приняв их за оси, и спроецировать внутрь квадрата два перпендикулярных сгиба, как показано на Рис.38 для точки $(3/8, 5/8)$. Сгибы пересекутся в искомой точке, которая может стать опорной точкой развёртки оригами.

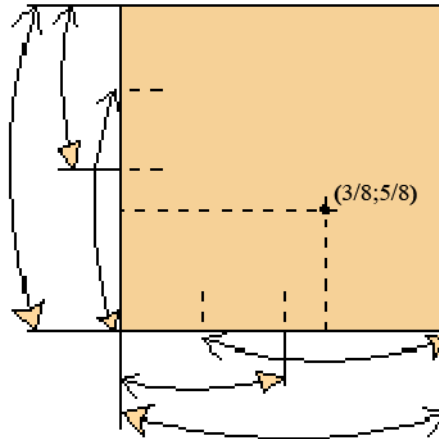


Рис. 38. Построение точки $(3/8, 5/8)$ внутри квадрата по опорным точкам на сторонах.

Мы узнали, что координаты точки на сторонах, т.е. соответствующие им отрезки, могут быть приближены разными путями. Простейший из возможных методов – двоичный, который и применён на данном рисунке. Вспомним, что с помощью двоичного метода приближение произвольно взятой на каждой стороне точки с точностью $.005$ требовало максимум девяти сгибов. Поэтому локация точки внутри квадрата тем же методом и с такой же точностью требовала бы 18 сгибов.

Однако построение x - и y - координат независимо друг от друга – малоэффективный метод локации. Двоичный алгоритм использует для этого лишь одну из операций Хузита - Хатори, а именно $O2$ («имея две точки, p_1 и p_2 , мы можем наложить p_1 на p_2 »), а значит, задействует точки только на одной из сторон квадрата. Можем ли мы поступить лучше, используя любую другую из этих операций? И если да, то как?

Рассмотрим более широкий вопрос: «как много различных точек мы можем создать на данном квадрате, сделав не более r сгибов?» Если мы задались определённой точкой, и существует большое число точек, строимых за относительно малое число шагов, то велики шансы, что одна из построенных точек будет достаточно близкой к искомой. И это может быть выражено численно; если мы имеем N построенных точек, распределённых на квадрате относительно равномерно, то для любой искомой опорной точки существует построенная в среднем на расстоянии $N^{-1/2}$ от цели. Так, например, имея 10^6 построенных точек, возможно приблизиться к любой данной целевой точке с точностью в среднем до $.001$ в любом месте квадрата (т.е. среди всех построенных точек найдётся такая, которая будет отстоять от искомой не более чем на $.001$ выбранной единицы).

Следующий вопрос, который возникает: что такое «построимые точки заданного ранга»? Вопрос появляется в связи с рекурсивным построением всех возможных точек.

Рассмотрим случай $r=0$, т.е., незамеченный квадрат. В этом случае есть 4 точки - углы, и четыре прямые - стороны. Углы квадрата даны, их определение не требует сгибов; таким образом, мы присвоим вершинам углов *нулевой ранг*.

Мы можем присвоить ранг линии сгиба также, как и точке; *ранг ЛС* есть число сгибов, требующихся для её построения. Как говорилось, незамеченный квадрат содержит четыре исходных отрезка - стороны. Эти линии имеют нулевой ранг по той же причине - они даны, а не построены. Таким образом, квадрат содержит по 4 исходные точки и линии *нулевого ранга*, $r=0$.

Теперь рассмотрим случай $r=1$. Возможное с помощью каждой из операций O1 - O5 Хузита –Жустина складывание изображено на Рис. 39. Действия O6 and O7 (пока) не позволяют нам создавать новые прямые.

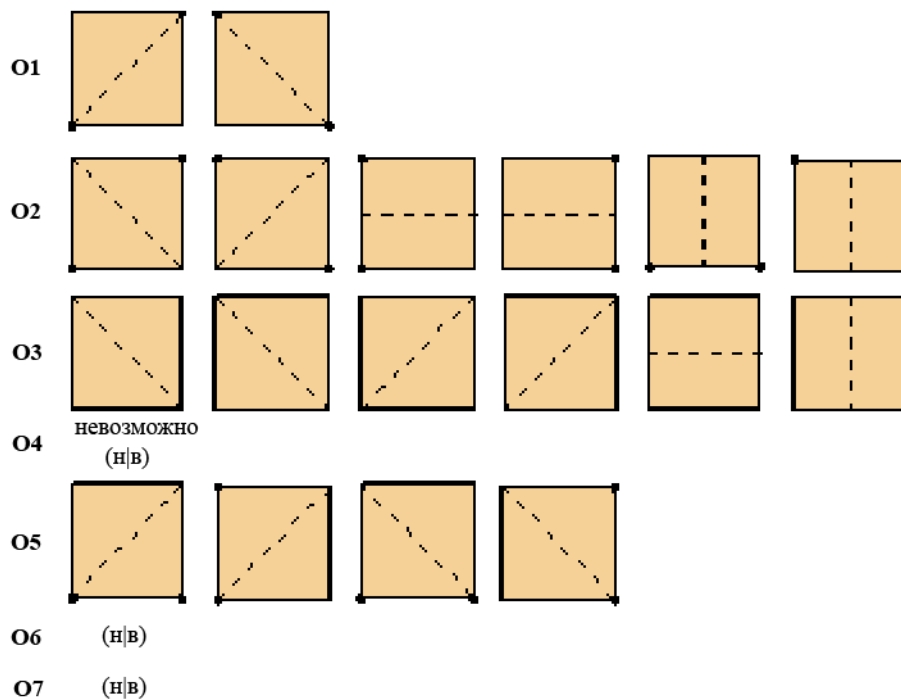


Рис. 39. Сгибы, построимые на исходном квадрате с помощью 7 действий НЖА. Точки и прямые, вовлечённые в построение, выделены на рисунке.

Рис. 39 показывает, что, используя все семь действий НЖА, здесь можно создать только 4 различные линии: два бисектора прямых углов – диагонали, и две средние линии. Т.к. каждая из этих линий получается одним сгибом, все они имеют *ранг 1*.

Пересечения четырёх новых прямых друг с другом и со сторонами квадрата определяют 5 новых точек: середины сторон и центр квадрата. Каждая новая точка на стороне квадрата задаётся пересечением стороны *0-ранга* и прямой *1-ранга*; т.о., эти точки получают одним сгибом, и поэтому присвоим им *ранг 1*. Центр квадрата может быть определён по-разному как пересечение различных пар прямых, но во всех сочетаниях каждая прямая в

паре имеет 1-ранг; поэтому центр имеет *ранг* 2. Сейчас мы имеем в итоге 9 различных точек и 12 различных линий. 8 из них имеют ранг $r \leq 1$.

Теперь пусть мы делаем более одной складки. При 9 различных исходных точках существует $9 \times 8 = 72$ их возможных пар. Каждая из операций O1 и O2 действует между парой точек и создаёт новую; таким образом, на следующем шаге построения мы можем ожидать перехода от 9 к 153 возможным точкам. Сходным образом O3 действует на пары прямых, O4 – на комбинации «точка-прямая», и т.д. Каждое действие геометрически создаёт новые прямые (попарные пересечения которых задают новые точки). Даже если дубли неизбежны, число различных возможных для построения точек и прямых растёт экспоненциально с числом допустимых складок.

Если мы делаем новые сгибы, ранг вновь созданных точек и прямых может быть рекурсивно выражен через ранги предыдущих, вовлечённых в совмещения для создания этих новых. Новая точка всегда задаётся пересечением в точности двух линий, и её ранг определён формулой

$$r_p = r_{l_1} + r_{l_2}. \quad (76)$$

С другой стороны, линия сгиба может быть создана разными путями («точка-точка», «точка-прямая» и т.д.), и при этом её ранг всегда возрастает на 1 (с учётом самой ЛС):

$$r_{l_j} = 1 + \sum_{p_i} r_{p_i} + \sum_{l_j} r_{l_j}. \quad (77)$$

Число построимых *точек одного ранга* зависит от действий, которыми мы располагаем для их построения. Один из простейших случаев, допускающих аналитическую трактовку – дубль-двоичный, или *дубль-бинарный метод*, в рамках которого для получения новых сгибов мы ограничиваемся совмещениями пар точек на одной стороне (это и есть рассмотренный нами в начале раздела способ задания координаты на оси – стороне квадрата). Относительно легко показать, что число построимых этим путём *точек данного ранга r* на стороне равно

$$N(r) = 1 + 2^r. \quad (78)$$

С несколько большим усилием может быть показано, что число построимых этим методом *точек ранга r*, которые могут располагаться в любом месте квадрата (что равносильно заданию двух координат перпендикулярными сгибами) равно

$$N(r) = 1 + \left(3 + \frac{r}{2}\right) 2^r, \quad (79)$$

и это задаёт последовательность числа точек $N = \{4, 8, 17, 37, 81 \dots\}$ для $r = \{0, 1, 2 \dots\}$.

Если мы расширим множество приемлемых действий до всего множества 7 операций НЈА, происходит комбинаторный взрыв. Простой подсчёт числа способов совмещений точек и прямых всеми возможными способами даёт последовательность $N = \{4\ 258, 154\ 800,$

132 826 269...}, члены которой растут на порядок 1000 с каждым следующим шагом. Однако только часть возможных комбинаций реализуема физически, и эта часть содержит много дублей — одинаковых точек, которые строятся различными путями (точнее, различных путей, которые приводят к одинаковым точкам). Число *различных* построимых точек намного меньше комбинаторного предела.

Другая «муха в повидле»^x - то, что «знать, что построимая точка лежит где-то около целевой» - совершенно не то же самое, что «знать, что построимая точка действительно *есть*». Было бы весьма неплохо, если, задавшись произвольной точкой (x,y) , мы могли бы найти формулу для ближайшей построимой точки данного ранга, и последовательность складывания для её нахождения.

Такая формула существовала для двоичного приближения заданного отрезка; при заданной длине x ближайшее построимое отношение ранга N являлось N -значным двоичным приближением числа x , а последовательность складывания была закодирована в его двоичном представлении.

В общем случае мы используем все операции НЖА, и считаем допустимыми любые комбинации точек и прямых, создающие на квадрате новые прямые линии. К нашему огорчению, в общем случае не существует известного метода для нахождения ближайшей построимой точки данного ранга, и я сильно подозреваю, что такого метода не существует вообще.

К счастью, даже неэффективные методы могут оказаться подходящими. Т.к. 10^6 точек должно быть достаточно, чтобы обеспечить точность порядка .001, то их будет достаточно, чтобы просто построить метки и сгибы ранга 10^6 , тем более меньшего; тогда, задавшись искомой целевой точкой, можно просто перебрать все варианты и найти точку, ближайшую к искомой. Очевидно, такой перебор не из тех, что делаются вручную; но это достаточно просто для компьютера.

Я написал программу на C++, названную *ReferenceFinder*, которая делает что-то вроде этого. Она берёт на входе координаты целевой точки, опорной точки будущей развёртки, и выводит лучшие алгоритмы складывания, с наименьшей ошибкой определяющие локацию этой точки. При запуске *ReferenceFinder* строит базу данных из 300 000 различных прямых и меток ранга 6 или ниже, рекурсивно строя метки высшего ранга по меткам более низкого, и отмечая дубли, околодубли и комбинации, реализовать которые оказывается невозможно физически. Эти строго отфильтрованные результаты выстраиваются в куда более скромную, но так же впечатляющую последовательность числа меток N , пробегающую $N=\{4, 8, 65, 1033, 7009, 32\,469, 277\,546\}$.

Используя 277 546 меток ранга 6 или ниже, я выбрал 1000 случайных целевых точек, нашёл ближайшие к ним построимые точки, и вычислил статистику распределения ошибок. Результаты даны в Таб.13.

Квантиль	Ошибка
10 ^{-я}	0.0004
20 ^{-я}	0.0006
50 ^{-я}	0.0013
80 ^{-я}	0.0024
90 ^{-я}	0.0032
95 ^{-я}	0.0042
99 ^{-я}	0.0081

Таб. 13. Квантиль и ошибка для 6-сгибного построения различных целевых точек по базе из 277 546 сгибов (построение ранга 6).

Вообще говоря, ошибка порядка 0.005 — 1.2 мм. на 25 – сантиметровом квадрате — практически незаметна. Для 97% целевых точек существует 6-сгибная последовательность, достигающая такого уровня точности. Сравните это с двоичным методом, требующим порядка 18 сгибов для достижения того же уровня!

Разница в том, что на каждом шаге построения все различные возможные сгибы и метки строятся множеством возможных комбинаций объектов более низкого ранга, что приводит к экспоненциальному росту числа вариантов; экспоненциальный множитель грубо равняется числу различных способов совмещений существующих точек и прямых, порождающих новые.

Компьютерное нахождение эффективных последовательностей складывания представляет более чем академический интерес. Так как оригами-дизайнеры обращаются к математическим методам творчества, становится необходимым создавать эффективные алгоритмы нахождения опорных точек, определяемых единственным образом как решения алгебраических уравнений высших порядков. Программы, такие как *ReferenceFinder*, могут численно строить эти решения, и они могут быть удивительными в своей эффективности. Ряд последних книг по оригами [3, 35, 36] включал такие сгенерированные компьютером алгоритмы складывания как часть диаграмм отдельных моделей, и я искренне надеюсь, что такое их применение станет более распространённым в будущем.

Ссылки • References

- [1] James Brunton, “Mathematical exercises in paper folding,” *Mathematics in School*, Longmans for the Mathematical Association, vol. 2, no. 4, July 1973, p. 25.
- [2] Robert J. Lang, “Four Problems III,” *British Origami*, no. 132, October, 1988, pp. 7–11.
- [3] Robert J. Lang, “Western Pond Turtle,” *Origami Design Secrets*, A K Peters, 2003.
- [4] Shuzo Fujimoto and M. Nishiwaki, *Sojo Suru Origami Asobi Eno Shotai* (Invitation to creative origami playing), Asahi Culture Centre, 1982.
- [5] Jeannine Mosely, private comm.
- [6] Masamichi Noma, *Origami Tanteidan Newsletter*, issue 14.

- [7] Koji Husimi, *Origami no kikagaku* (Origami and Geometry), Nippon Hyoronsha, Tokyo (1979).
- [8] Kunihiro Kasahara and Toshie Takahama, *Origami for the Connoisseur*, Japan Publications, 1987, pp. 18–19.
(Кунихико Касахара, Тоши Такахама, *Оригами для Знатоков*)
- [9] Kunihiro Kasahara, *Origami Omnibus*, Japan Publications, 1988, pp. 76–77.
- [10] Aleksandr Ia. Khinchin, *Continued Fractions*, Dover Publications, 1997.
(Александр Яковлевич Хинчин, *Ценные дроби*)
- [11] Peter Engel, *Folding the Universe: Origami from Angelfish to Zen*, New York, Vintage Books, 1989.
- [12] Jun Maekawa, “Evolution of Origami Organisms,” *Symmetry: Culture and Science*, vol. 5, no. 2, 1994, pp. 167–177.
- [13] Kunihiro Kasahara, *Viva! Origami*, Tokyo, Sanrio, 1983.
- [14] Robert J. Lang, “Albert Joins the Fold,” *New Scientist*, vol. 124, no. 1696/1697, December 23/30, pp. 38–57, 1989.
- [15] Robert J. Lang, “Origami: Complexity Increasing,” *Engineering & Science*, vol. 52, no. 2, pp. 16–23, 1989.
- [16] David Auckly and John Cleveland, “Totally Real Origami and Impossible Paper Folding,” *American Mathematical Monthly*, vol. 102, no. 3, pp. 215–226, March 1995.
- [17] Thomas Hull, “A Note on ‘Impossible’ Paperfolding,” *The American Mathematical Monthly*, vol. 103, no. 3, March, 1996.
- [18] Hisashi Abe, described in *British Origami*, no. 108, p. 9, 1984
- [19] Koji Fusimi, “Trisection of angle by Abe,” *Saiensu* supplement, October, 1980, p. 8.
- [20] Jacques Justin, described in *British Origami*, no. 107, pp. 14–15, 1984.
- [21] Robert Geretschläger, “Euclidean Constructions and the Geometry of Origami,” *Mathematics Magazine*, vol. 68, no. 5, December, 1995, pp. 357–371.
- [22] Robert Geretschläger, “Folding the Regular Triskaidekagon,” presented at AMS Joint Mathematics Meeting, Baltimore, MD., January 9, 1998.
- [23] Robert Geretschläger, “Folding the Regular 19-gon,” presented at AMS Joint Mathematics Meeting, Baltimore, MD., January 9, 1998.
- [24] Robert Geretschläger, “Solving Quartic Equations in Origami,” presented at AMS Joint Mathematics Meeting, Baltimore, MD., January 9, 1998.
- [25] James Pierpont, “On an undemonstrated theorem of the *Disquisitiones Arithmeticae*,” *American Mathematical Monthly Bulletin*, no. 2, 1895–1896, pp. 77–83.
- [26] Robert J. Lang, *The Complete Book of Origami*, New York, Dover Publications, 1988.
- [27] Humiaki Huzita and Benedetto Scimemi, “The Algebra of Paper-Folding (Origami),” *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, H. Huzita, ed., 1989, pp. 215–222.

- [28] Humiaki Huzita, “Understanding Geometry through Origami Axioms,” *Proceedings of the First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET91)*, J. Smith ed., British Origami Society, 1992, pp. 37–70.
- [29] Thomas Hull, “Geometric Constructions via Origami,” *Proceedings of the Second International Conference on Origami in Education and Therapy (COET95)*, V’ Ann Cornelius, ed., Origami USA, 1995, pp. 31–38.
- [30] Peter Messer, “Problem 1054,” *Crux Mathematicorum*, vol. 12, no. 10, December, 1986.
- [31] Thomas Hull, <http://web.merrimack.edu/hullt/geoconst.html>, 2003.
- [32] Koshiro Hatori, <http://www.jade.dti.ne.jp/~hatori/library/conste.html>, 2003.
- [33] <http://mathworld.wolfram.com/Ophiuride.html>, 2003.
- [34] <http://mathworld.wolfram.com/CissoidofDiocles.html>, 2003.
- [35] Robert J. Lang, *Origami Insects II*, Gallery Origami House, Tokyo, 2003 [in press].
- [36] John Montroll, *A Plethora of Polyhedra in Origami*, Dover Publications, 2002.
- [37] Jacques Justin, “Resolution par le pliage de l’équation du troisième degré et applications géométriques”, *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, Humiaki Huzita, ed., 1989, pp. 251-261.
- [38] Roger C. Alperin and Robert J. Lang, “One, Two, and Multi-Fold Origami Axioms,” *Origami*⁴, Robert J. Lang, ed., A K Peters Ltd., 2009, pp. 371–394.

Комментарии • Translator's comments

This work of Dr. Robert J. Lang is well-known in wide (but still quite narrow) circles of English-speaking mathematicians & origami artists – professionals and amateurs in both fields. Meanwhile it worth of attention much wider audience – it’s all who encounter geometric constructions in their everyday work.

Mathematicians could extract from it extremely effective methods for constructive problems solving – both exact & approximative (which are also exact with allowable error). Origami does many things, which were impossible with traditional construction ways. It allows constructing exactly any rational, and even to construct irrationals & transcendentals like $\sqrt[3]{2}$ and π with any level of accuracy! Furthermore, these methods are free of any instruments, and provide constructions in fact by “bare hands”. Besides of it, due to this work (and some others of author) origami competently keeps the place

Настоящая работа Роберта Ланга давно известна в широких (но всё же достаточно узких) англоязычных кругах математиков и оригамистов – как профессионалов, так и любителей в той и другой области. Между тем она достойна внимания куда более широкой аудитории – всех, кто так или иначе сталкивается в своей работе с геометрическими построениями.

Художники, скульпторы и даже инженеры, к примеру, оказавшись без нужных инструментов, могут довольно легко получать нужные им пропорции, имея в руках лишь листок бумаги, и затем масштабировать полученные отрезки и углы на объект своей работы. Пример такого использования – разработанные и запатентованные Джоном Майером, Робертом Лангом и Матсом Хагбергом в 1969 и 2003 годах методы быстрых расчётов углов отражения света в оптических

among branches of applied geometry, and math generally. Using original parameterization of a line, according to ways of line defining in origami, Lang had proven completeness of origami 'axioms' set (which is analog of standard Euclidean axiomatic on the plane), and it follows, complete formal correctness of results being obtained by this method of construction.

Artists, sculptors & even engineers, for example, being working without necessary tools, also could relatively easy obtain desired proportions & angles, having only sheet of paper; and then to scale result on their working subject.

Example of such using of origami – methods of tracing angles in optical systems, developed in 1969 by Jon H. Myer, and in 2003 by Robert J. Lang & Mats Hagberg, and commonly called “*Optigami*”.

And certainly, “Constructions” is of critical significance for modern **origami-designers**. It's the key to understanding basic working concepts of computer-aided origami design with programs like *TreeMaker & ReferenceFinder*; these also were written by R. Lang and are used by many designers around the world. Indeed, they are not doing all the plenty of work; to start, designer must have at least an idea of model. But they use might of mathematics with power of computer to do for a seconds routine work of many days, leaving you much more time to real creation. Therefore, such programs are the future of origami design.

I'm sincerely grateful to Robert for his trust and honor of translating his work. It integrates Math, Art & everyday practice, and I think, this work will be practically helpful for those who use constructions every day, or just make them enjoy intricate mathematical ideas.

Mark A. Sigalovsky

системах с помощью складывания, названные авторами общим термином «*Optigami*».

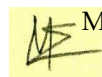
Математики могут извлечь из этой работы ценные методы решения задач на построение – как точные, так и приближённые со сколь угодно малой погрешностью, и применить их на практике. Многие из того, что может оригами, недоступно другим методам построений. Так, способы оригами позволяют точно строить рациональные расстояния, и даже приближать иррациональности и трансцендентные числа, такие как $\sqrt[3]{2}$ и π , с любой точностью. К тому же эти методы вообще не требуют инструментов, и позволяют строить искомые отрезки и углы фактически «голыми руками».

Кроме того, благодаря этой работе (и ряду других работ автора) оригами по праву является областью прикладной геометрии, и математики вообще. Р. Ланг с помощью оригинальной параметризации прямой строго доказал полноту существующей системы формальных правил, «аксиом» оригами – аналога аксиоматики евклидовой геометрии, а значит, и математическую корректность результатов, получаемых с помощью этого метода построений.

Также здесь определяются классы величин, доступных для построения с помощью оригами. Оригами-построения рассматриваются как методы численного решения алгебраических уравнений до 3-го порядка включительно, и некоторых классов уравнений высшего порядка.

И, конечно, «Конструкции» имеют особое значение для современных **оригами – дизайнеров**. Эта работа – ключ к пониманию алгоритмических методов дизайна и принципов работы дизайнерских программ таких, как *TreeMaker* и *ReferenceFinder*, которые также написаны д-ром Лангом и используются многими авторами моделей оригами. Разумеется, эти программы не делают всю работу за человека; для начала должна быть хотя бы идея будущей фигуры. Но они, используя мощь математических алгоритмов и компьютерных вычислителей, берут на себя многодневную, рутинную предварительную работу, делая её за секунды, и освобождают Вам время для *творчества*. За такими программами – будущее дизайна оригами.

Я благодарен д-ру Лангу за доверие и честь переводить его работу. Его сочинения - сплав математики, искусства и практики, и я думаю, что эта работа будет практически полезна всем, кто сталкивается с построениями в своей деятельности, или хотя бы просто принесёт удовольствие от знакомства с красивыми математическими идеями.



М. Сигаловский.
14.01.11

Комментарии по улучшению перевода можно направлять на почту

mathoriy@yandex.ru

Транскрипция имён собственных • Name Transcription

<i>Transcript</i>	<i>Original</i>		
Роберт Джеймс Ланг	Robert J. Lang	Хисаши Абэ	Hisashi Abe
Джеймс Брунтон	James Brunton	Жак Жустен	Jacques Justin
Хьюм; Элайас	Hulme; Elias	Роберт Геретшлегер	Robert Geretschläger
Жанин Моузли	Jeannine Mosely	Фумиаки Хузита	Humiaki Huzita
Шузо Фуджимото	Shuzo Fujimoto	Коширо Хатори	Koshiro Hatori
Масамичи Нома	Masamichi Noma	Диокл (Диоклес)	Diocles
Казуо Хага	Kazuo Haga	Джеймс Пьерпонт	James Pierpont
Кодзи Фушими	Koji Husimi (Fusimi)	Петер Мессер	Peter Messer

Термины • Terms

Здесь собраны термины, которые хотелось подчеркнуть, или пока не имеющие устоявшихся русскоязычных аналогов. Для последних, как мне кажется, я подобрал перевод оптимальный по звучанию и смыслу.

<i>Циркуль и линейка (угольник), ЦЛ или СЛ</i>	<i>Compass-and-straightedge</i>
<i>Построимость</i>	<i>Constructability</i>
<i>Опорная точка</i>	<i>Reference point</i>
<i>Оригами – алгоритм; алгоритм, цепочка</i>	<i>Folding sequence</i>

или последовательность складывания	
<i>Бисектор</i> ; трисектор	<i>Bisector; trisector</i>
<i>Ранг</i>	<i>Rank</i>
<i>Коробчатый метод</i>	<i>Box-pleating</i>
<i>Метод кладки</i> , замощение, кладка	<i>Tiling</i>
<i>Линия сгиба</i> (ЛС)	<i>Fold line</i>
<i>Квантиль</i>	<i>Percentile</i>
<i>Наивнутренний</i>	<i>Innermost</i>
<i>Дубль - двоичный</i>	<i>Double-binary</i>

Сноски • Footnotes

ⁱ Термин принят в переводе этой работы как равнозначный слову «биссектриса»:

1. Как оригинальный латинский (и термин оригинала) 2. В русскоязычной терминологии давно в ходу термин «трисектор» (см. напр., публикации МЦНМО МГУ) -- «бисектор» принят согласно этой же модели.

ⁱⁱ В оригинале «десятичной точки», согласно американской математической нотации. В формулах и числах оставлена точка для сохранения их оригинального написания; в переводе используется термин «запятая». Если дробь меньше единицы, часто «ноль целых» на письме отбрасывают, записывая дробную часть (мантиссу) без 0 сразу после точки, как в формуле (3). Отметим, что автор пользуется как американской (без нуля), так и традиционной (с нулём) нотацией.

ⁱⁱⁱ Целые числа могут рассматриваться как подмножество рациональных дробей. Любое целое число можно представить дробью с единичным знаменателем, к примеру, $7=7/1$, $-231=-231/1$, и т.д. Ноль представляется дробью с любым ненулевым знаменателем: $0=0/1=0/2=...$

^{iv} В бесконечность (*лат.*)

^v Если транслитерировать ЦЛ в CL, то буква L как раз и изобразит угольник.

^{vi} «tan» - американское обозначение тангенса угла. Т.е. 'tan x' = 'tg x'. Буква *i* – это индекс (не путать с мнимой единицей).

^{vii} Практически «полнота» любой системы означает наличие в ней всех элементов для выполнения *системной функции* (т.е. того, ради чего система существует), и при этом - полное отсутствие лишних элементов, не несущих функциональной нагрузки (которая уже распределена между имеющимися элементами). Известный пример – велосипед, который без колеса не поедет, но и с лишним колесом – поедет вряд ли. Таким образом, неполной системе «двухколёсный велосипед без колеса» необходимо одно (и только одно!) колесо для «полноты» - чтобы он мог ехать.

С формальной точки зрения полнота системы аксиом означает, главным образом, её *непротиворечивость* и *критериальность*, т.е. необходимость и достаточность данного фундамента - совокупности базовых предпосылок, для построения всей теории; кроме того, для этого построения необходимо наличие *правил выводимости*, т.е. законов (которые также должны быть непротиворечивы!), управляющих созданием из базовых 'кирпичиков' более сложных объектов. Итак:

Непротиворечивость нашей системы следует «по построению»: это не перечень искусственных правил (непротиворечивость которого пришлось бы проверять формальными методами), а символическая запись действительных законов, *реально* действующих при складывании плоскости. В качестве **правил вывода** используются обычные математические законы, т.к. автору удалось 'перевести' складывание на язык алгебры и аналитической геометрии; т.е. практическому построению сгиба на листе бумаги было установлено чёткое, взаимно - однозначное математическое соответствие – параметрическое уравнение прямой. И наконец, **критериальность** предложенной системы семи правил доказывается с помощью указанных правил вывода. Таким образом, формально система 7НЖА действительно является полной, что и доказывается в данном разделе.

Далее в этой работе будет формально показано, что система из 7 действий Хузита-Жустина *необходима и достаточна* для того, чтобы задать точку или прямую всеми способами, возможными при плоском складывании.

Этот комментарий далёк от претензий на освещение всего вопроса *полноты*, одного из самых сложных в формальной логике (для этого лучше обратиться к специальной литературе); он нацелен лишь на то, чтобы читатель получил самое общее представление.

^{viii} Есть некоторые условные различия между «ЛС» и сопутствующими терминами оригами. «Линия сгиба» - прямая на плоскости, абстракция; «Сгиб» - физическая граница между двумя полуплоскостями листа бумаги, соответствующая линии сгиба; «Складка» - видимая линия на бумаге, результат развёрнутого сгиба. При этом чаще всего «сгиб» может употребляться в значении «складка», но не наоборот.

^{ix} «Порядок безразличен...» - Совмещение элементов (точек и линий) является *сочетанием*, а не *размещением*. И то, и другое – способы группировки элементов конечного множества. Безразлично, совместить ли прямую с точкой или наоборот – результат будет один: новая линия. Именно эта безразличность порядка характеризует сочетание: для равенства сочетаний достаточно, чтобы состав элементов совпадал. Число сочетаний из n элементов по k равно $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, число размещений - $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, т.е. для одних и тех же n и k сочетаний в $k!$ раз меньше, чем размещений. Отметим, что размещения более характерны для *информативных* объектов и систем. Примеры: «адам» и «дама», n – значный кодовый замок при данном алфавите, любой алгоритм: диаграмма оригами, кулинарный рецепт, схема проезда (от порядка зависит результат).

^x *A fly in the ointment* - «Ложка дёгтя в бочке мёда».